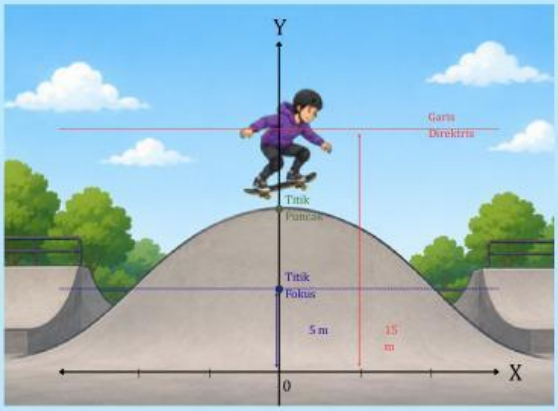
Orientasi Masalah

Sebuah *skatepark* dirancang memiliki lintasan bergelombang yang terdiri atas beberapa lengkungan. Agar lintasan tersebut simetris dan memiliki tingkat kecuraman yang sesuai untuk dilalui pemain *skateboard*, arsitek memodelkan salah satu lengkungan sebagai parabola.



Untuk memperoleh bentuk lengkungan yang sesuai dengan rancangan, arsitek menentukan posisi titik fokus dan garis direktris pada model koordinat Kartesius. Pada model koordinat Kartesius, permukaan tanah berimpit dengan sumbu *X*. Titik fokus parabola berada 5 meter di atas permukaan tanah, sedangkan garis direktris berada 15 meter di atas permukaan tanah dan sejajar dengan sumbu *X*. Bagaimana cara arsitek menentukan bentuk parabola tersebut? Setelah rancangan lintasan selesai dibuat, arsitek juga ingin mengetahui tingkat kemiringan lintasan pada titik (10, 5). Selain itu, arsitek ingin mengembangkan rancangan lain dengan tinggi titik puncak yang sama, tetapi lintasannya dibuat lebih landai agar lebih aman digunakan oleh pemain pemula. Bantulah arsitek menyelesaikan rancangan tersebut!

MARI MENINAT KEMBALI

Irisan kerucut (*conic sections*) dihasilkan dari perpotongan sebuah bidang datar dengan sebuah kerucut tegak beralas lingkaran (Stewart et al., 2021).

Bentuk kurva yang dihasilkan bergantung pada posisi dan kemiringan bidang pemotong terhadap sumbu kerucut. Perbedaan posisi bidang pemotong tersebut menghasilkan beberapa jenis kurva, salah satunya adalah bentuk parabola.

LIVEWORKSHEETS

Mari kita perhatikan ilustrasi perpotongan kerucut dengan sebuah bidang datar dari *GeoGebra* berikut ini!

Sedangkan **Parabola** sendiri adalah tempat kedudukan titik-titik pada bidang yang memiliki jarak sama terhadap suatu titik tertentu dan suatu garis tertentu.

Perhatikan ilustrasi pada GeoGebra berikut ini!

LIVEWORKSHEETS

- Titik tertentu disebut titik fokus (F).
- Garis tertentu disebut garis direktris.
- Garis yang melalui fokus dan tegak lurus terhadap direktris disebut sumbu simetri.
- Titik perpotongan parabola dengan sumbu simetri disebut titik puncak (V).
- Latus rektum adalah garis yang melalui fokus, tegak lurus terhadap sumbu simetri, dan memotong parabola di dua titik.

Perlu diingat bahwa titik puncak terletak di tengah-tengah antara titik fokus dan garis direktris.

Persamaan Parabola

Untuk menentukan persamaan parabola, perhatikan titik puncak, sumbu simetri, fokus, direktris, dan nilai p. Nilai p menyatakan jarak berarah dari titik puncak ke titik fokus.

Perhatikan ilustrasi pada *GeoGebra* berikut ini!

LIVEWORKSHEETS

Melalui konstruksi pada *GeoGebra* tersebut, berbagai posisi titik puncak dan fokus dapat ditunjukkan sehingga kita dapat melihat hubungan antara unsur-unsur parabola, arah bukaannya, dan persamaannya.

A. Puncak di O(0, 0)

Persamaan	Arah bukaan	Fokus	Direktris	Sumbu Simetri
$y^2 = 4px$	ke kanan jika $p > 0$	$F(p, 0)$	$x = -p$	$y = 0$
$y^2 = -4px$	ke kiri jika $p > 0$	$F(-p, 0)$	$x = p$	$y = 0$
$x^2 = 4py$	ke atas jika $p > 0$	$F(0, p)$	$y = -p$	$x = 0$
$x^2 = -4py$	ke bawah jika $p > 0$	$F(0, -p)$	$y = p$	$x = 0$

Panjang latus rektum: $L = |4p|$

B. Puncak di P(*a*, *b*)

Jika titik puncak tidak berada di O(0,0), bentuk persamaannya menjadi:

Persamaan	Arah bukaan
$(y - b)^2 = 4p(x - a)$	ke kanan
$(y - b)^2 = -4p(x - a)$	ke kiri
$(x - a)^2 = 4p(y - b)$	ke atas
$(x - a)^2 = -4p(y - b)$	ke bawah

Untuk $(y - b)^2 = 4p(x - a)$, diperoleh:

- Titik puncak: $V(a, b)$
- Fokus: $F(a + p, b)$
- Direktris: $x = a - p$
- Sumbu simetri: $y = b$
- Panjang latus rektum: $|4p|$

Bentuk lain mengikuti arah bukaan yang sesuai

Garis Singgung Parabola

Garis singgung adalah garis yang memiliki satu titik persekutuan dengan parabola pada titik singgung tertentu. Jika titik singgungnya adalah $T(x_1, y_1)$, persamaan garis singgung dapat ditentukan berdasarkan bentuk persamaan parabolanya.

LIVEWORKSHEETS

Persamaan Parabola	Persamaan Garis Singgung
$y^2 = 4px$	$y_1y = 2p(x + x_1)$
$y^2 = -4px$	$y_1y = -2p(x + x_1)$
$x^2 = 4py$	$x_1x = 2p(y + y_1)$
$x^2 = -4py$	$x_1x = -2p(y + y_1)$
$(y - b)^2 = 4p(x - a)$	$(y_1 - b)(y - b) = 2p(x_1 + x - 2a)$
$(y - b)^2 = -4p(x - a)$	$(y_1 - b)(y - b) = -2p(x_1 + x - 2a)$
$(x - a)^2 = 4p(y - b)$	$(x_1 - a)(x - a) = 2p(y_1 + y - 2b)$
$(x - a)^2 = -4p(y - b)$	$(x_1 - a)(x - a) = -2p(y_1 + y - 2b)$

Perlu diingat untuk menentukan garis singgung, tentukan terlebih dahulu persamaan parabola, nilai p, dan titik singgung (x_1, y_1).

KEGIATAN 1

Mari Mengenali Unsur Parabola

Aktivitas 1.1 Hubungkan Unsur dan Pengertiannya

Sebelum membantu arsitek merancang *skatepark,* kalian harus memahami pengertian dari beberapa unsur parabola terlebih dahulu. Hubungkan unsur parabola berikut dengan pengertian yang sesuai melalui garis lurus.

UNSUR	PENGERTIAN
Titik Fokus	Garis yang melalui fokus dan tegak lurus direktris
Garis Direktris	Garis melalui fokus yang tegak lurus sumbu simetri
Sumbu Simetri	Titik perpotongan parabola dengan sumbu simetri
Titik Puncak	Garis tertentu yang menjadi acuan jarak parabola
Latus Rektum	Titik tertentu yang menjadi acuan jarak parabola

LIVEWORKSHEETS

KEGIATAN 2

Mari Mengidentifikasi Informasi

Aktivitas 2.1 Temukan Informasi Penting

Centang semua informasi yang benar berdasarkan masalah *skatepark* yang sudah disajikan sebelumnya.

- ☐ Permukaan tanah berimpit dengan sumbu (X).
- ☐ Titik fokus berada 15 meter di atas permukaan tanah.
- ☐ Garis direktris berada 15 meter di atas permukaan tanah.
- ☐ Garis direktris sejajar dengan sumbu (X).
- ☐ Titik fokus berada 5 meter di atas permukaan tanah.
- ☐ Titik puncak berada 15 meter di bawah permukaan tanah.

Aktivitas 2.2 Tuliskan Data yang Diketahui

Dari permasalahan yang sudah disajikan, tuliskan:

Permukaan tanah	: $y =$	
Ketinggian titik fokus	:	m
Ketinggian garis direktris	:	m

KEGIATAN 3

Mari Menentukan Unsur Parabola

Aktivitas 3.1 Menyusun Masing-Masing Unsur Parabola

Seret dan susun kotak agar mendapatkan unsur-unsur parabola yang benar

Titik Fokus	:		=		***15***	***V***	***F***
Garis Direktris	:		=		***y***	***5***	***(0, 10)***
Sumbu Simetri	:		=		***(0, 5)***	***x***	***0***
Titik Puncak	:		=		***p***	***(0, 15)***	***10***

LIVEWORKSHEETS

KEGIATAN 4

Mari Menentukan Nilai (p)

Setelah menentukan titik fokus dan titik puncak, sekarang tentukan jarak berarah dari titik puncak ke titik fokus.

Aktivitas 4.1 Mengamati Posisi Titik Fokus

Titik fokus berada _____ titik puncak, maka ke arah manakah parabola membuka? _____

Aktivitas 4.2 Menentukan Nilai p

Nilai (p) menyatakan jarak berarah dari titik puncak ke titik fokus.

Diketahui : Titik Fokus $F = (0, 5)$

Titik Puncak $V = (0, 10)$

Gunakan rumus : $p = y_F - y_V$

$p =$ ____ $-$ ____

$p =$ ____

Diperoleh nilai p _____ 0, menunjukkan parabola membuka _____

Aktivitas 4.3 Menentukan Makna Nilai p

Sehingga, dapat kita simpulkan

Jika titik fokus berada di atas titik puncak, parabola membuka _____

Jika titik fokus berada di bawah titik puncak, parabola membuka _____

KEGIATAN 5

Mari Menyusun Persamaan Parabola

Sekarang Arsitek telah mengetahui:

$V =$ (____, ____) dan $p =$ ____

Karena sumbu simetri parabola vertikal, bentuk umum persamaan parabolanya adalah _____ = _____ dengan titik puncak $V = (a, b)$.

LIVEWORKSHEETS

Aktivitas 5.1 Melengkapi Unsur Persamaan

Bantu Arsitek melengkapi nilai yang dibutuhkan

$a =$ ____

$b =$ ____

$p =$ ____

Aktivitas 5.2 Menyusun Persamaan

Substitusi nilai yang diperoleh pada **Aktivitas 5.1** ke dalam persamaan parabola

____ = ____

____ = ____

____ = ____

Sehingga diperoleh persamaan ____ = ____

KEGIATAN 6

Mari Memeriksa dengan *GeoGebra*

Gunakan ilustrasi *GeoGebra* berikut ini!

Substitusi persamaan yang diperoleh pada **Aktivitas 5.2**

Kemudian amati grafik yang terbentuk

LIVEWORKSHEETS

Aktivitas 6.1 Memeriksa Unsur Parabola

Bantu Arsitek untuk menyentang pernyataan di bawah ini yang sesuai.

- ☐ Titik puncak berada di $(0, 10)$.
- ☐ Fokus berada di $(0, 5)$.
- ☐ Sumbu simetri adalah $(x = 0)$.
- ☐ Direktris adalah $(y = 15)$.
- ☐ Parabola membuka ke atas.
- ☐ Parabola membuka ke bawah.

KEGIATAN 7

Mari Menentukan Garis Singgung

Rancangan lintasan telah diperoleh. Sekarang bantu Arsitek untuk mengetahui tingkat kemiringan lintasan pada titik $T = (10, 5)$, dengan persamaan parabola yang sudah diperoleh pada **Aktivitas 5.2**.

Aktivitas 7.1 Memeriksa Titik Singgung

Substitusikan titik $(10, 5)$ ke persamaan parabola.

____ = ____

____ = ____

____ = ____

Apakah titik $(10, 5)$ terletak pada parabola? ____

Aktivitas 7.2 Menentukan Persamaan Garis Singgung

Untuk parabola $(x - a)^2 = 4p(y - b)$, persamaan garis singgung yang melalui titik $T(x_1, y_1)$ adalah : ____ = ____

Dengan diketahui: a = ____ serta x_1 = ____

b = ____ y_1 = ____

p = ____

LIVEWORKSHEETS

Aktivitas 7.3 Menyusun Persamaan

Substitusi nilai yang diperoleh pada **Aktivitas 7.2** ke persamaan garis singgung

	=	
	=	
	=	
	=	
	=	
	=	

Diperoleh persamaan garis singgung parabola pada titik $T(10, 5)$ adalah:

	=	

KEGIATAN 8

Mari Merancang Lintasan Baru

Arsitek ingin membuat lintasan baru yang:

- memiliki tinggi titik puncak yang sama,
- memiliki sumbu simetri yang sama,
- tetapi **lebih landai**.

Gunakan *GeoGebra* berikut untuk merancang beberapa kemungkinan parabola dengan titik puncak yang sama. Kemudian amati perubahan pada grafik.

Eksplorasi dengan GeoGebra

BUKA GEOGEBRA >

LIVEWORKSHEETS

Aktivitas 8.1 Menemukan Pola

Setelah melakukan sebuah perancangan melalui *GeoGebra* tersebut, bagian mana sajakah berikut ini yang dirasa benar? Bantu Arsitek menyentang pernyataan yang dirasa benar.

- ☐ Titik puncak tetap.
- ☐ Sumbu simetri tetap.
- ☐ Nilai $|p|$ diperbesar.
- ☐ Posisi fokus berubah.
- ☐ Posisi direktris berubah.
- ☐ Parabola menjadi lebih lebar.
- ☐ Parabola menjadi lebih landai.
- ☐ Parabola menjadi lebih sempit.

Aktivitas 8.2 Menentukan Unsur yang Diubah

Jika titik puncak tetap tetapi lintasan ingin dibuat lebih landai, maka ....

- ☐ A. Titik puncak harus dipindahkan.
- ☐ B. Sumbu simetri harus diubah.
- ☐ C. Nilai $|p|$ diperkecil
- ☐ D. Nilai $|p|$ diperbesar.
- ☐ D. Titik puncak dan sumbu simetri harus diubah.

Aktivitas 8.3 Menjelaskan Pengaruh Perubahan

Semakin besar nilai $|p|$, maka bentuk parabola menjadi _____, lintasan menjadi _____, sedangkan titik puncak dan sumbu simetri tetap.

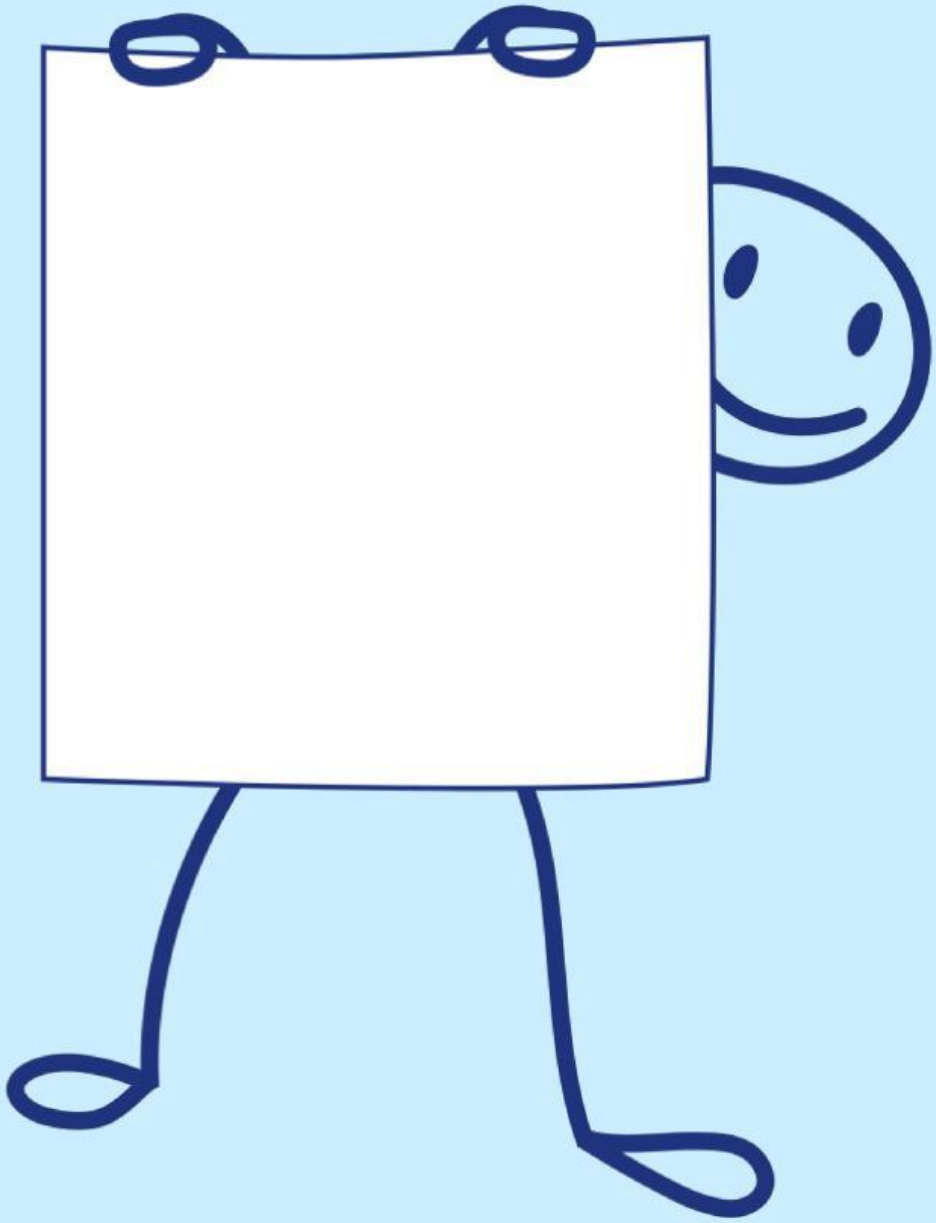
LIVEWORKSHEETS

KEGIATAN 9

Mari Menyimpulkan

Aktivitas 9.1 Menyimpulkan

Setelah melakukan berbagai **Aktivitas** dan eksplorasi dengan *GeoGebra*, apa saja yang telah kalian temukan? Tuliskan kesimpulan berdasarkan hasil penyelidikan kalian pada lembar di bawah ini.



LIVEWORKSHEETS

DAFTAR PUSTAKA

Rahmasari, Y. D. N. (n.d.). Modul Pembelajaran Matematika Tingkat Lanjut untuk SMA/MA Kelas XII LKS Eksis. Citra Pustaka.

Stewart, J., Clegg, D. K., & Watson, S. (2021). Calculus: Early Transcendentals (9th ed.). Cengage Learning.

LIVEWORKSHEETS

PROFIL PENYUSUN

NAMA	: Niken Dwi Putri Indriani
NIM	: 230210101089
EMAIL	: nikennmsc@gmail.com
PROGRAM STUDI	: Pendidikan Matematika
FAKULTAS	: Keguruan dan Ilmu Pendidikan
UNIVERSITAS	: Universitas Jember

LIVEWORKSHEETS