MATEMATIKA

LKPD

LEMBAR KERJA PESERTA DIDIK

INTEGRAL TENTU

Penyusun

Mutiara Safitri
Atik Rahmawati
Sudarmanto
Yazid Mubarok

TUJUAN PEMBELAJARAN

1. Siswa mampu menentukan nilai integral tentu dari suatu fungsi pada interval yang diberikan dengan menggunakan konsep integral tentu
2. Siswa mampu menyatakan luas suatu daerah yang diarsir ke dalam bentuk integral tentu berdasarkan grafik fungsi dan batas-batas yang diberikan
3. Siswa mampu menentukan luas daerah yang dibatasi oleh dua kurva

PETUNJUK PENGERJAAN

1. Isi nama Anda pada bagian yang telah disediakan di atas.
2. Berdoalah sebelum mulai pengerjaan.
3. Mulailah membaca, mengamati, dan mengerjakan dari Aktivitas I
4. Baca dan teliti dengan cermat semua langkah-langkah pengerjaan pada tiap Aktivitas
5. jika ada yang tidak dimengerti dapat ditanyakan kepada guru
6. Petunjuk penggunaan GeoGebra dapat diakses dengan memindai kode QR yang tersedia

Identitas Diri

Nama :______________________________

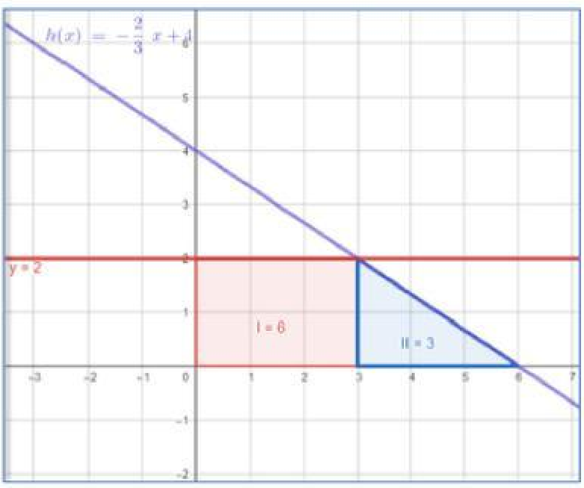
Kelas :______________________________

No. Absen :______________________________

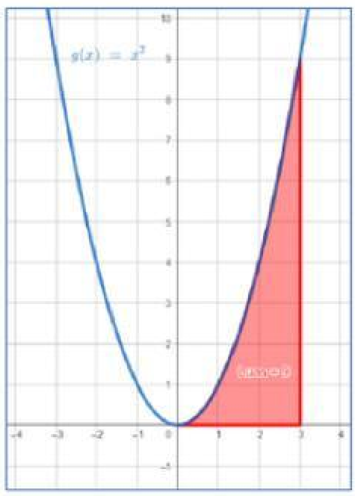
0. PENDAHULUAN LUAS

Berbicara mengenai luas, biasanya kita menghitung luas segiempat atau segitiga

Perhatikan gambar dibawah ini! Berapakah luas dibawah kurva dan diatas sumbu X dibawah ini?



GAMBAR 1



GAMBAR 2

Perhatikan Gambar 1. Luas 1 kita bisa menghitungnya menggunakan rumus luas segiempat pada umumnya yaitu panjang kali lebar Kita dapatkan 2 x 3 = 6 satuan. Sementara,

Perhatikan Gambar 2. Luas 2 dapat dicari dengan mengggunakan luas segitiga didapat yaitu $\frac{1}{2}a \cdot t$ maka didapatkan $\frac{3\text{-}2}{2} = 3$ satuan.

Yang menjadi pertanyaan bagaimana jika bangunnya tidak berbentuk suatu segiempat atau segitiga?

Berapakah luas daerah yang diarsir, yang dibatasi oleh kurva $f(x) = x^2$ dan sumbu X , dimana luasnya dapat kita lihat sepanjang x = 0 sampai x = 3 ? (Gambar 2)

Disinilah Integral Tentu berperan, Sebelum menghitung luas dibawah kurva tersebut kita pelajari dulu tentang integral tentu

Materi

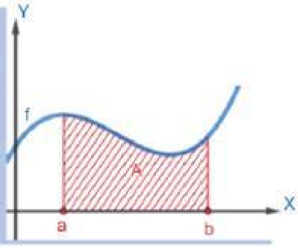
A. INTEGRAL TENTU SEBAGAI LUAS DAERAH DIBAWAH KURVA

INTEGRAL TENTU

Misalkan f kontinu pada selang [b , a] dan misalkan F adalah anti turunan f pada [b , a] maka

$$\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b)$$

Catatan : a disebut dengan batas atas dan b disebut dengan batas bawah



Kita bisa melihat langkahnya hanya ada 2 yaitu

Langkah 1. Cari Integral (anti turunan) dari fungsi nya

Langkah 2. Masukkan nilai batas atas dan nilai batas bawah ke hasil integralnya, lalu hitung nilainya di batas atas dikurangi batas bawah

Kadang-kadang integral tentu disebut dengan integral terbatas karena nilai integralnya ditentukan batas nya yaitu batas atas dan batas bawah.

Dapatkah sekarang kalian membedakan Integral Tentu dan Integral Tak-Tentu?

Contoh 1. Sekarang kita hitung luas pada gambar 2 diatas. Hitunglah luas yang dibawah oleh kurva $f(x) = x^2$ dari x = 0 sampai x = 3 (**Lihat Gambar 2**).

Penyelesaian: Kita akan menggunakan bantuan Integral Tentu, pertama-tama kita cari anti turunan dari $f(x) = x^2$, kita tahu bahwa anti turunannya (integralnya) adalah $\frac{1}{3}x^3$, jadi luasnya dapat kita tulis dalam integral tentu menjadi

Masukkan x = 3

$$\int_0^3 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + C\right]_0^3$$

Masukkan x = 0

$$= \left[\frac{1}{3}(3)^3 + C\right] - \left[\frac{1}{3}(0)^3 + C\right]$$

$$= 9 + C - C = 9$$

∴ jadi luasnya adalah 9 satuan

Perhatikan karena C akan selalu dikurangi C yang hasilnya adalag C − C = 0 , kita dapat untuk tidak menuliskan C nya

Gambar 1. Juga dapat kita hitung dengan integral. Perhatikan

Bangun I adalah luas wilayah dibawah kurva $f(x) = 2$ dari titik 0 sampai 3 maka dapat kita hitung dengan integral

$$\int_0^3 2\,dx = [2x]_0^3 = 2(3) - 2(0) = 6$$

Materi

Bangun II adalah luas wilayah dibawah kurva $f(x) = \frac{2}{3}x + 4$ dari titik 3 sampai 6 maka dapat kita hitung dengan integral

$$\int_3^6 \left(-\frac{2}{3}x + 4\right) dx = \left[-\frac{1}{3}x^2 + 4x\right]_3^6 = \left[-\frac{1}{3}(6)^2 + 4(6)\right] - \left[-\frac{1}{3}(3)^2 + 4(3)\right] = 12 - 9 = 3$$

Contoh 2. Sekarang kita hitung luas dibawah kurva yang hampir mirip-mirip contoh 1. Lihat gambar 3 disamping

Hitunglah luas daerah dibawah kurva dari $f(x) = 3x^2 + 2$

dari x = 1 sampai x = 3

Penyelesaian:

Kita dapat menulis dalam integral dengan batas bawah 1 dan batas atas 3 yaitu

$$\int_1^3 (3x^2 + 2)\ dx = [x^3 + 2x]_1^3$$

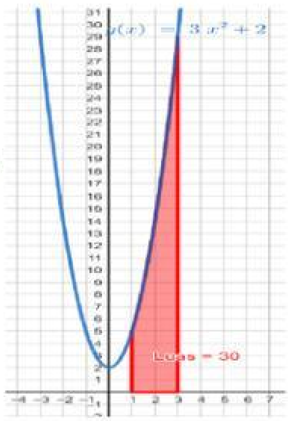
$$= [(3)^3 + 2(3)] - [(1)^3 + 2(1)]$$

$$= [27 + 6] - [1 + 2]$$

$$= 33 - 3$$

$$= 30$$

∴ jadi luasnya adalah 30 satuan



GAMBAR 3

Contoh 3. Jadi integral tentu itu dapat kita bayangkan dengan luas wilayah antara suatu kurva dan sumbu X

Hitunglah Integral tak tentu

$$\int_1^2 (-3x^2 + 2)\ dx = [-x^3 + 2x]_1^2$$

$$= [-(2)^3 + 2(2)] - [-(1)^3 + 2(1)]$$

$$= [-8 + 4] - [-1 + 2]$$

$$= -4 - 1$$

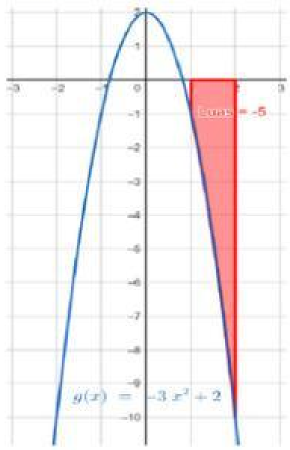
$$= -5$$

∴ jadi luasnya adalah - 5 satuan

Mungkin ada yang bertanya mengapa luasnya negatif?

Kita bisa melihat dari gambar 4 bahwa luasnya ada dibawah sumbu x,

sehingga bernilai **negatif.**



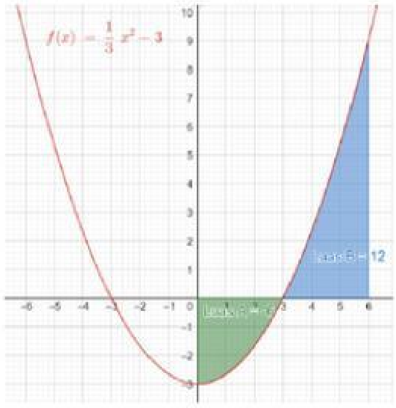
GAMBAR 4

Mungkin sekarang kita mulai memahami mengapa disebut integral tentu dan integral tak tentu. Ya, jika integral tentu itu terdapat atau ditentukan batasnya , jika integral taktentu itu tidak ditentukan batasnya

Benar bahwa semua aturan pada integral tak tentu pastinya juga berlaku pada integral tentu

Materi

Contoh 4 Kita hitung Integral untuk luas A dan B



GAMBAR 5

$$A.\ \int_0^3 \left(\frac{1}{3}x^2 - 3\right) dx = \left[\frac{1}{9}x^3 - 3x\right]_0^3$$

$$= \left[\frac{1}{9}(3)^3 - 3(3)\right] - \left[\frac{1}{9}(0)^3 - 3(0)\right]$$

$$= [3 - 9] - [0]$$

$$= -6$$

$$B.\ \int_3^6 \left(\frac{1}{3}x^2 - 3\right) dx = \left[\frac{1}{9}x^3 - 3x\right]_3^6$$

$$= \left[\frac{1}{9}(6)^3 - 3(6)\right] - \left[\frac{1}{9}(3)^3 - 3(3)\right]$$

$$= [24 - 18] - [3 - 9]$$

$$= 6 - (-6)$$

$$= 12$$

Bagaimana jika A dan B di tambah? Tentunya nilainya adalah $-6 + 12 = 6$, Kita coba di bagian C ini yang merupakan jumlah dari A dan B yaitu integral dari $\left(\frac{1}{3}x^2 - 3\right)$ dengan batas bawah 0 dan batas atas 6

$$C.\ \int_0^6 \left(\frac{1}{3}x^2 - 3\right) dx = \left[\frac{1}{9}x^3 - 3x\right]_0^6$$

$$= \left[\frac{1}{9}(6)^3 - 3(6)\right] - \left[\frac{1}{9}(0)^3 - 3(0)\right]$$

$$= 6 - 0$$

$$= 6$$

Langkah-Langkah Menggunakan Geogebra

Langkah (1). Nyatakan fungsi yang akan dianalisis, misalnya $f(x)$ pada kolom aljabar

Langkah (2). Misalkan A adalah luas daerah antara kurva f dan sumbu-X pada [b , a] dapat ditulis dengan formula

$$A = integral\ (\langle fungsi\rangle, \langle batas\ bawah\rangle, \langle batas\ atas\rangle)$$

Yaitu

$$\int_b^a f(x)\,dx = A$$

menjadi

$$A = integral\ (f, b, a)$$

Amati hasil visual dan nilai yang ditampilkan

Materi

B. INTEGRAL TENTU LUAS DAERAH DI ANTARA DUA KURVA

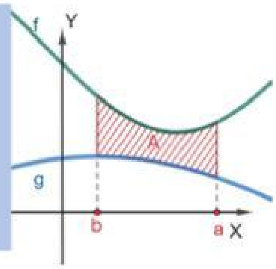
LUAS DAERAH DI ANTARA DUA KURVA

Misalkan f dan g kontinu $b \le x \le a$ dengan $f(x) \ge g(x)$ dan

A adalah luas daerah diantara f dan g pada [b , a]

maka dapat dinyatakan dengan

$$A = \int_b^a [f(x) - g(x)]\, dx$$



Contoh 5. Hitunglah luas daerah diantara fungsi
$f(x) = x^2 - 3x + 6$ dan $g(x) = x - 2$

dari x = 1 sampai x = 4

Alternatif Penyelesaian: karena nilai $f(x) \ge g(x)$ untuk semua nilai $1 \le x \le 4$ maka luas daerah dapat dihitung sebagai integral

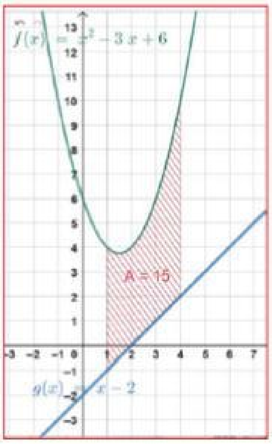
$$A = \int_b^a [f(x) - g(x)]\, dx$$

$$A = \int_1^4 [(x^2 - 3x + 6) - (x - 2)]\, dx =$$

$$\int_1^4 [x^2 - 4x + 8]\, dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 8x\right]_1^4$$

$$= \left[\frac{1}{3}(4)^3 - 2(4)^2 + 8(4)\right] - \left[\frac{1}{3}(1)^3 - 2(1)^2 + 8(1)\right]$$

$$= \left[\frac{64}{3} - 32 + 32\right] - \left[\frac{1}{3} - 2 + 8\right] = 15$$



GAMBAR 6

Langkah-Langkah Menggunakan Geogebra

Langkah (1). Nyatakan fungsinya misal f dan g dengan $f(x) \ge g(x)$ (nilai f lebih dari nilai g)

Langkah (2). Misalkan A adalah luas daerah yang dibatasi oleh kurva f dan g sumbu x pada [b , a] dapat ditulis dengan formula

$$A = IntegralBetween\ (\langle fungsi\ 1\ (atas)\rangle, \langle fungsi\ 2\ (bawah)\rangle, \langle batas\ bawah\rangle, \langle batas\ atas\rangle)$$

Yaitu untuk

$$A = \int_b^a [f(x) - g(x)]\, dx$$

menjadi

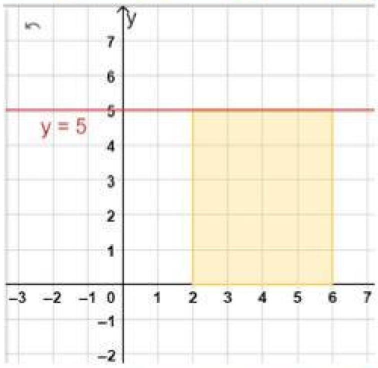
$$A = IntegralBetween\ (f, g, b, a)$$

Amati hasil visual dan nilai yang ditampilkan

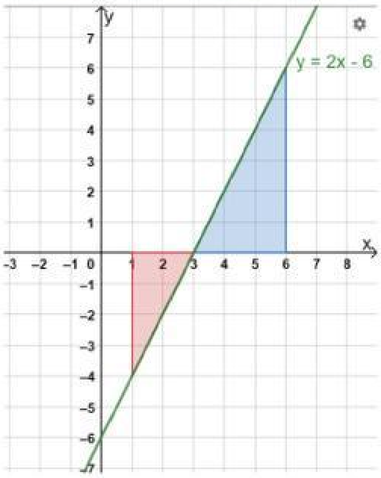
Aktivitas 1

Nyatakan luas daerah yang diarsir ke dalam bentuk integral tentu, kemudian tentukan nilainya dengan perhitungan yang tepat

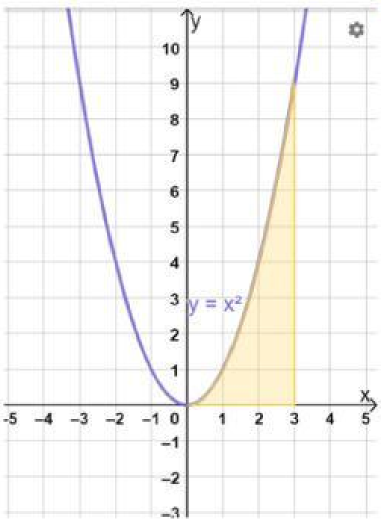
untuk kurva y = 5 antara x = 2 sampai x = 6



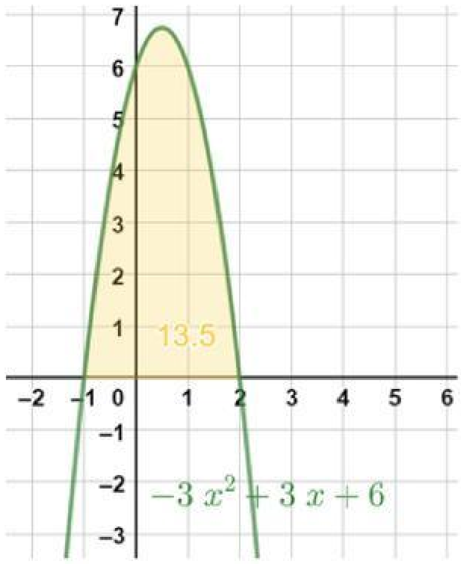
Untuk kurva y = 2x – 6 dengan ketentuan
a. antara x = 1 sampai x = 3
b. antara x = 3 sampai x = 6
c. antara x = 1 sampai x = 6



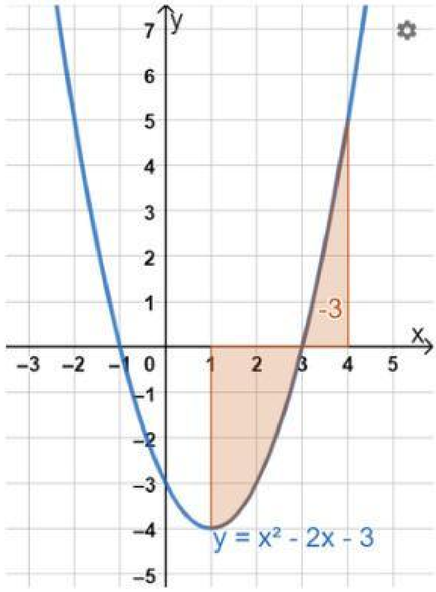
Untuk kurva y = x2 antara x = 0 sampai x = ...



Daerah yang diarsir nomor 4



Daerah yang diarsir nomor 5



Aktivitas 2

Gambarlah grafik dari setiap fungsi berikut menggunakan aplikasi GeoGebra, kemudian hitung nilai integral tentu secara aljabar. Setelah itu, cocokkan hasil perhitunganmu dengan luas daerah yang ditampilkan pada grafik.

a. $\int_{2}^{5} 5\,dx$

b. $\int_{-3}^{2} x\,dx$

c. $\int_{2}^{4} (x+5)\,dx$

d. $\int_{-1}^{2} (x^2+2)\,dx$

e. $\int_{-1}^{2} (4x-6x^2)\,dx$

f. $\int_{-1}^{2} (-x^2+4x+2)\,dx$

Aktivitas 3

Gunakan konsep integral tentu untuk menghitung luas daerah yang diarsir berwarna kuning pada grafik berikut.

Fungsi dalam gambar

$f(x) = x^2 - 4x + 5$

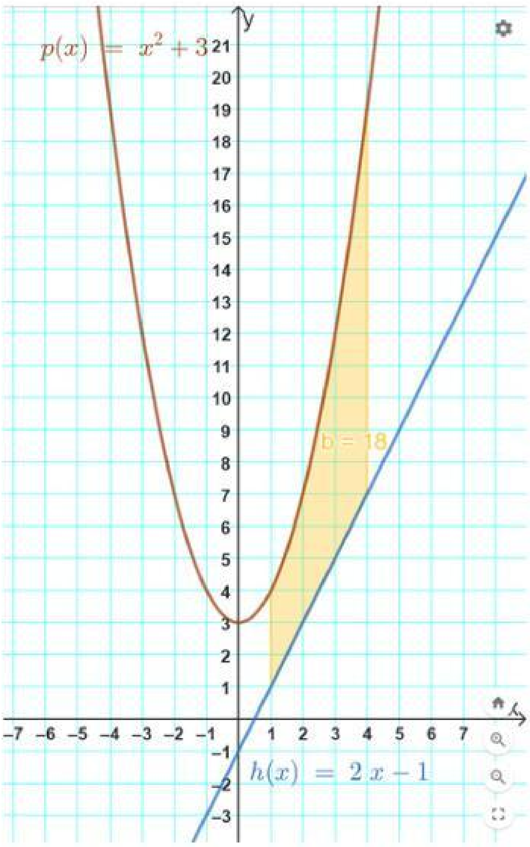
$g(x) = x^2 - 2x - 3$

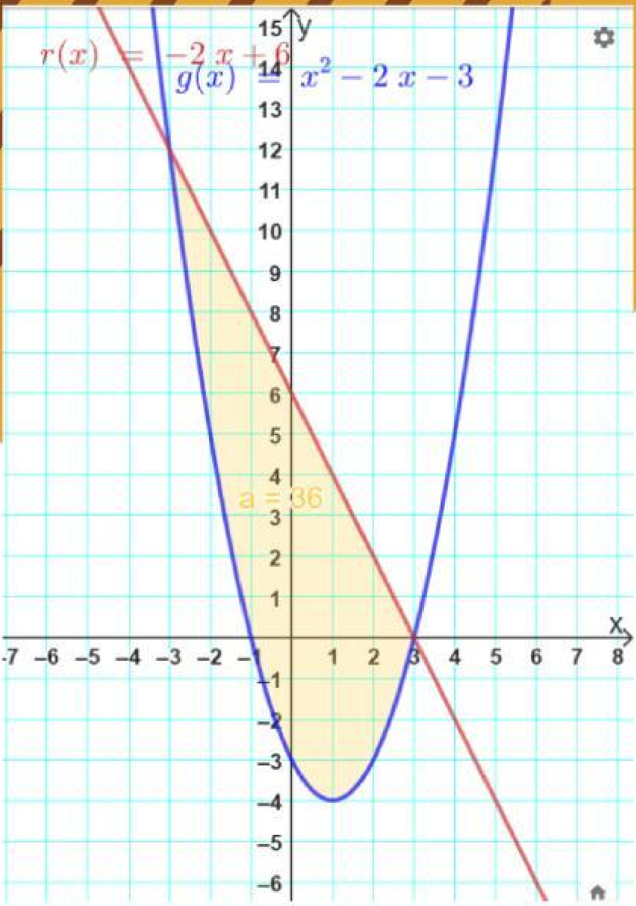
$h(x) = 2x - 1$

$p(x) = x^2 + 3$

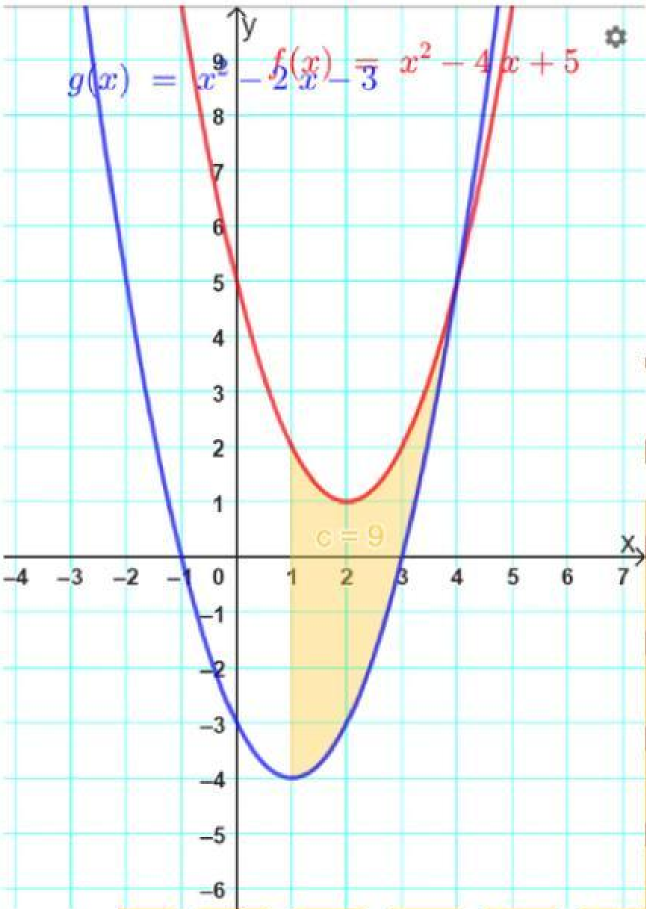
$q(x) = -2x^2 + 10x - 3$

$r(x) = -2x + 6$

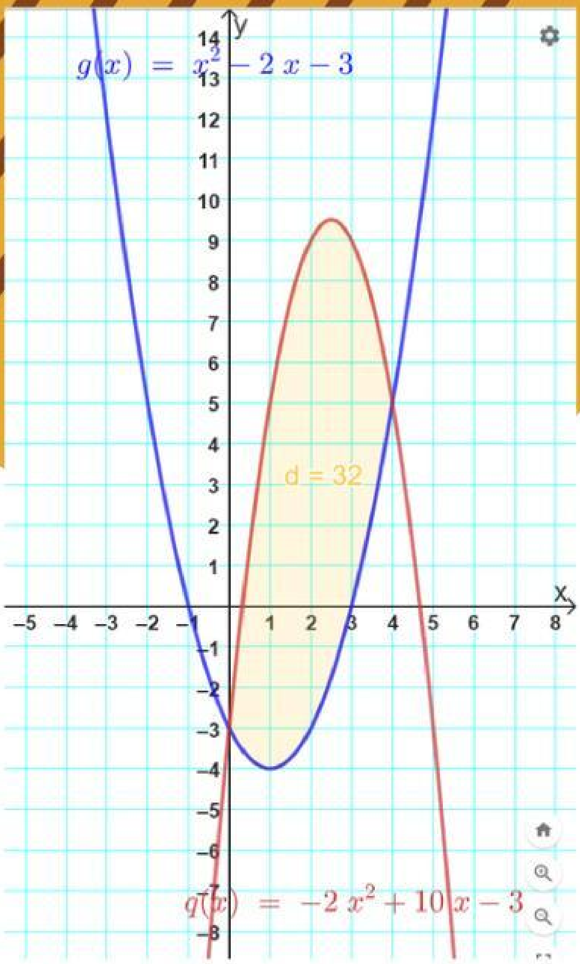




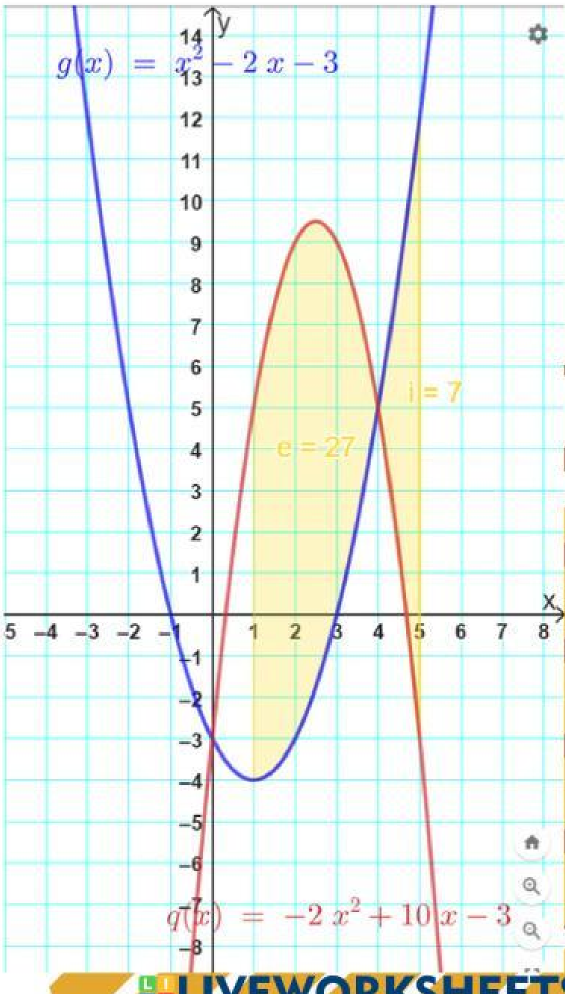
$r(x) = -2x + 6$
$g(x) = x^2 - 2x - 3$
a = 36



$g(x) = x^2 - 2x - 3$
$f(x) = x^2 - 4x + 5$
c = 9



$g(x) = x^2 - 2x - 3$
d = 32
$q(x) = -2x^2 + 10x - 3$



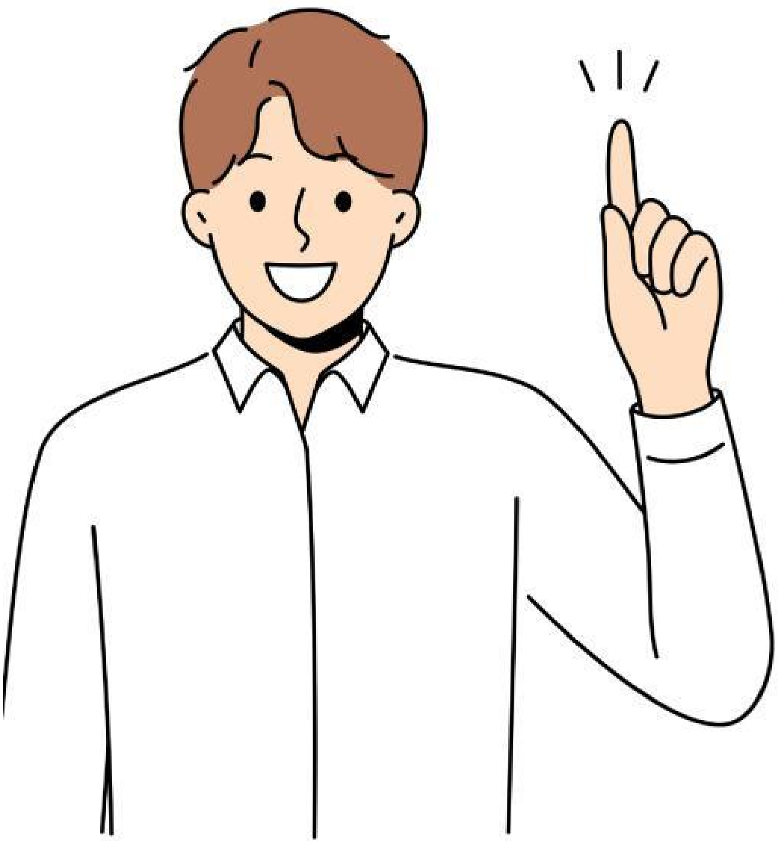
$g(x) = x^2 - 2x - 3$
e = 27
i = 7
$q(x) = -2x^2 + 10x - 3$

Latihan

Apa yang terjadi jika dua fungsi pembatas saling bersilang dalam interval integrasi?

Bagaimana cara menentukan fungsi atas dan fungsi bawah dalam kasus seperti itu?

Mengapa hasil integral bisa bernilai negatif, dan bagaimana kita menafsirkannya dalam konteks luas?



Belajar Integral bukan tentang mencari hasil akhir saja, tetapi tentang memahami proses dan menikmasi setiap langkahnya