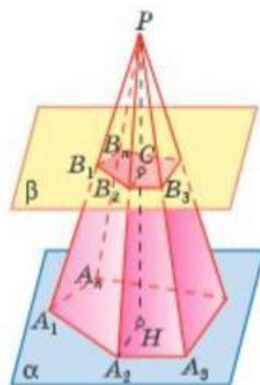


Возьмём произвольную пирамиду $PA_1A_2...A_n$ проведём секущую плоскость β , параллельную плоскости α основания пирамиды и пересекающую боковые рёбра в точках $B_1, B_2, ..., B_n$ (рис. 83). Плоскость β разбивает пирамиду на два многогранника. Многогранник, гранями которого являются n -угольники $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ (нижнее и верхнее основания), расположенные в параллельных плоскостях, и n четырёхугольников $A_1A_2B_2B_1, A_2A_3B_3B_2, ..., A_nA_1B_1B_n$ (боковые грани), называется усечённой пирамидой. Отрезки $A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n$ называются боковыми рёбрами усечённой пирамиды. Усечённую пирамиду с основаниями $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ обозначают так: $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$.

Перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется высотой усечённой пирамиды. На рисунке 83 отрезок PH является высотой усечённой пирамиды. Докажем, что боковые грани усечённой пирамиды — трапеции. Рассмотрим, например, боковую грань $A_1A_2B_2B_1$ (см. рис. 83). Стороны A_1A_2 и B_1B_2 параллельны, поскольку принадлежат прямым, по которым плоскость PA_1A_2 пересекается с параллельными плоскостями α и β . Две другие стороны A_1B_1 и A_2B_2 этой грани не параллельны — их продолжения пересекаются в точке P . Поэтому данная грань — трапеция. Аналогично можно доказать, что и остальные боковые грани — трапеции. Усечённая пирамида называется правильной, если она получена сечением правильной пирамиды плоскостью, параллельной основанию. Основания правильной усечённой пирамиды — правильные многоугольники, а боковые грани — равнобедренные трапеции (докажите это). Высоты этих трапеций называются апофемами. Площадь боковой поверхности усечённой пирамиды называется суммой площадей её боковых граней.

Теорема. Площадь боковой поверхности правильной усечённой пирамиды равна произведению полу-суммы периметров оснований на апофему.



Усечённая пирамида

Рис. 83

Таким образом,

1. Нижнее основание — это исходное основание полной пирамиды.
2. Верхнее основание — это многоугольник, полученный в сечении. Он многоугольнику, лежащему в нижнем основании.
3. Основания — правильные многоугольники.
4. $S_{\text{бок}} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot a$

Задача 1. Основанием пирамиды является параллелограмм со сторонами 5 м и 4 м и меньшей диагональю 3 м. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 2 м. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Дано:

$ABCDK$ – пирамида

$ABCD$ – параллелограмм

$AB = 5$ м., $BC = 4$ м.

$BD = 3$ м.

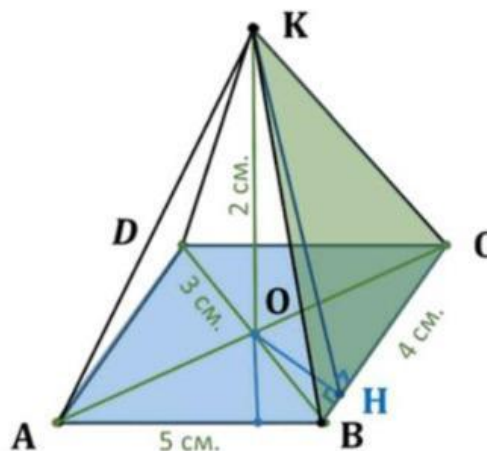
$OK \perp ABCD$

$OK = 2$ м.

Найти:

$S_{\text{полная}} = ?$

Решение:



По условию треугольник CBD – прямоугольный (по теореме, обратной теореме Пифагора) =>
 $S_{OBC} = 0,5 \cdot OB \cdot BC = 0,25 \cdot DB \cdot BC = 3 \text{ м}^2 \Rightarrow$

По свойству параллелограмма $S_{AOD} = S_{ABCD} / 4 = 3 \text{ м}^2 \Rightarrow S_{ABCD} = 12 \text{ м}^2$.

$S_{OBC} = 0,5 \cdot OH \cdot BC = 3 \text{ м}^2 \Rightarrow OH = 1,5$ м.

По построению треугольник KON – прямоугольный.

По теореме Пифагора из треугольника KON находим НК:

$NK = \sqrt{OK^2 + OH^2} = \sqrt{4 + 2,25} = \sqrt{6,25} = 2,5$ м.

По теореме о трёх перпендикулярах $KH \perp BC \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{KBC} = 0,5 \cdot KH \cdot BC = 2,5 \cdot 2 = 5 \text{ м}^2 \Rightarrow S_{KAD} = 5 \text{ м}^2$.

По аналогии найдём KAB

$S_{OAB} = 0,5 \cdot h_{AOB} \cdot AB = 3 \text{ м}^2 \Rightarrow h_{AOB} = 1,2$ м.

По теореме Пифагора h_{AKB} :

$h_{AKB} = \sqrt{OK^2 + h_{AOB}^2} = \sqrt{4 + 1,44} = \sqrt{5,44}$ м. Теореме о трёх перпендикулярах $h_{AKB} \perp AB \Rightarrow$

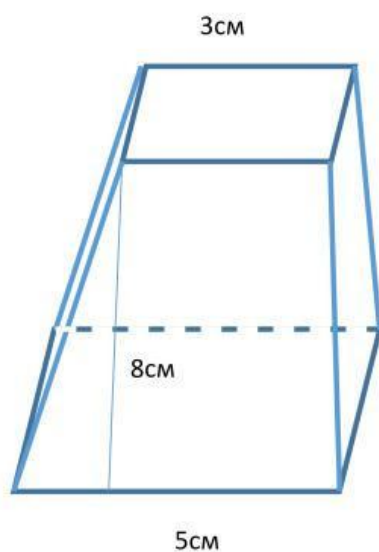
$\Rightarrow S_{KAB} = 0,5 \cdot h_{AKB} \cdot AB = \sqrt{5,44} \cdot 2,5 = \sqrt{34} \text{ м}^2 \Rightarrow S_{KCD} = \text{ м}^2$.

$S_{\text{полная}} = S_{\text{боковая}} + S_{\text{основания}} = S_{KAB} + S_{KBC} + S_{KCD} + S_{KDA} + S_{ABCD} = 5 + 5 + \sqrt{34} + \sqrt{34} + 12 = (22 + 2 \cdot \sqrt{34}) \text{ м}^2$.

Ответ: $(22 + 2 \cdot \sqrt{34}) \text{ м}^2$.

Задание 2. В правильной усечённой четырёхугольной пирамиде стороны оснований равны 5 см и 3 см, а апофема равняется 8 см. Найдите площадь полной поверхности усечённой пирамиды.

Решение: $S_{\text{полн}} =$



$$S_1 = 5 \cdot 5 = 25 \text{ см}^2.$$

$$S_2 = 3 \cdot 3 = 9 \text{ см}^2.$$

$$S_{\text{бок}} = 0,5 \cdot (3 \cdot 4 + 5 \cdot 4) \cdot 8 = 128 \text{ см}^2.$$

$$S_{\text{полн}} = 25 + 9 + 128 = 162 \text{ см}^2.$$

Ответ: 162 см^2 .

Задание 3. В правильной усечённой четырёхугольной пирамиде, площадь поверхности которой равна 380 м^2 известны стороны оснований – 10 м и 4 м. Найти апофему.

Проверь себя!

Какая из формул подходит для подсчёта площади поверхности усечённой пирамиды:

А) $S = S_1 + S_2 + (P_1 + P_2)l/2$

Б) $S = S_1 \cdot S_2 \cdot S_{\text{бок}}$

В) $S = S_{\text{осн}} \cdot h/2$

Домашнее задание.

Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 3 и 5.

Боковое ребро = $\sqrt{17}$.

Найти площадь полной поверхности.

