

☐ Fungsi peluang jika diketahui fungsi distribusi kumulatifnya.

☐ Pengertian fungsi peluang Distribusi kumulatif (CDF)

☐ Fungsi distribusi kumulatif dari variabel acak X didefinisikan

☐ sebagai : $F(x) = P(X \leq x)$

☐ (Peluang bahwa nilai variabel acak kurang dari / sama dengan x)

☐ Sifat-sifat CDF:

☐ * $0 \leq F(x) \leq 1$

☐ * $F(x)$ tidak menurun

☐ * $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$

☐ ► Menentukan fungsi peluang dari CDF

☐ 1) Jika variabel acak kontinu

☐ Fungsi peluang (PDF) diperoleh dari turunan CDF.

$$f(x) = F'(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

☐ Syarat:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

☐ 2) Jika variabel acak diskrit

☐ Gunakan selisih CDF:

$$P(X=x) = F(x) - F(x^-)$$

☐ dimana $F(x^-)$ adalah nilai CDF sebelum x .

☐ ► Contoh soal

☐ Diketahui Fungsi distribusi kumulatif

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

☐ a) Fungsi peluang $f(x)$

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

$$f(x) = \frac{d}{dx} (x^2) = 2x$$

Sehingga

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

b) Peluang $P(0,2 < x < 0,6)$

$$P(0,2 < x < 0,6) = \int_{0,2}^{0,6} 2x \, dx$$

$$= [x^2]_{0,2}^{0,6}$$

$$= (0,6)^2 - (0,2)^2$$

$$= 0,32$$

$$\therefore P(0,2 < x < 0,6) = 0,32$$

Fungsi Densitas jika diketahui fungsi distribusi kumulatifnya.

► Pengertian Fungsi Densitas Peluang (PDF)

Fungsi Densitas Peluang adalah fungsi yang menggambarkan kapasitas peluang dari variabel acak kontinu.

Dibandingkan dengan $F(x)$

Hubungan antara PDF dan CDF adalah

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

Artinya: Fungsi Densitas diperoleh dari turunan fungsi distribusi kumulatif

► Sifat-sifat Fungsi Densitas

$$1. f(x) \geq 0$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = 1$$

3. Peluang suatu interval

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) \, dx$$



► Contoh soal

Diketahui fungsi distribusi kumulatif:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{x-1}{2}, & 1 \leq x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

Tentukan

a) Fungsi densitas peluang $f(x)$

$$f(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x-1}{2} \right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}$$

Sehingga:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

b) Peluang $P(1,5 < x < 2,5)$

$$\begin{aligned} P(1,5 < x < 2,5) &= \int_{1,5}^{2,5} \frac{1}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} (2,5 - 1,5) \\ &= \frac{1}{2} (1) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

* Fungsi Pembangkit Moment (MGF): Umum, diskrit, kontinu, kegunaan,

► Pengertian Fungsi Pembangkit Momen (MGF)

Fungsi Pembangkit Momen (MGF) adalah fungsi yang digunakan untuk menghasilkan momen-momen dari suatu variabel acak, seperti:

• Nilai harapan (mean) • Varians • Momen ke -n



MGF dari variabel acak x didefinisikan sebagai:

$$M_x(t) = E(e^{tx})$$

dengan

• E = nilai harapan (ekspektasi)

• t = parameter riil

• x = variabel acak

► MGF untuk Variabel Acak Diskrit

Jika x adalah variabel acak diskrit dengan fungsi peluang $P(x=x_i)$, maka:

$$M_x(t) = E(e^{tx})$$

$$M_x(t) = \sum e^{tx_i} P(x=x_i)$$

atau

$$M_x(t) = \sum_i e^{tx_i} P(x=x_i)$$

► MGF untuk variabel acak kontinu

Jika x memiliki fungsi kepadatan $f(x)$, maka:

$$M_x(t) = E(e^{tx})$$

$$M_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx$$

► Hubungan MGF dengan momen

MGF digunakan untuk mencari momen dengan cara diferensiasi

Momen Pertama

$$E(x) = M'_x(0)$$

Momen kedua

$$E(x^2) = M''_x(0)$$

Varian

$$\text{Var}(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$



• Sifat-sifat MGF

1. $M_x(0) = 1$

2. Jika dua variabel acak memiliki MGF yang sama, maka distribusinya sama

3. Jika x dan y independen

$$M_{x+y}(t) = M_x(t)M_y(t)$$

• Contoh soal

Diketahui, $M_x(t) = 2e^t + 3e^{2t}$

Tentukan nilai harapan $E(x)$

Penyelesaian: $E(x) = M'_x(0)$

$$M'_x(t) = 2e^t + 6e^{2t}$$

Substitusi $t=0$

$$M'_x(0) = 2(1) + 6(1)$$

$$= 8$$

$$\therefore E(x) = 8$$

