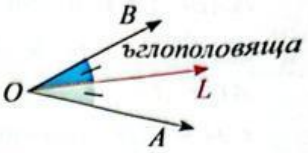
118

ЪГЛОПОЛОВЯЩА НА ЪГЪЛ. ПОСТРОЯВАНЕ НА ЪГЛОПОЛОВЯЩА НА ДАДЕН ЪГЪЛ

Знаем, че по определение лъч, който разделя един ъгъл на два равни ъгъла, се нарича **ъглополовяща** на ъгъла.

Ако $OL^{\rightarrow}$ е **ъглополовяща** на $\sphericalangle AOB$, то $\sphericalangle AOL = \sphericalangle BOL = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB$.



Сега ще докажем теорема – свойство и теорема – признак за точките от ъглополовящата на ъгъл.

Теорема – свойство

Всяка точка от ъглополовящата на даден ъгъл е на равни разстояния от раменете му.

Дадено:

$OL^{\rightarrow}$ – ъглополовяща на $\sphericalangle AOB$

$X \in OL^{\rightarrow}$, $XM \perp OA$ и $XN \perp OB$

Да се докаже:

$XM = XN$

Доказателство:

Разглеждаме ΔOMX и ΔONX.

1) OX – обща страна

2) $\sphericalangle MOX = \sphericalangle NOX$ (OL – ъглополовяща)

3) $\sphericalangle OMX = \sphericalangle ONX = 90°$

$\Rightarrow \Delta OMX \cong \Delta ONX$ по втори признак.

Следователно $XM = XN$ като съответни страни в еднакви триъгълници.

Теорема – признак

Всяка точка от вътрешността на даден ъгъл, която е на равни разстояния от раменете му, лежи на ъглополовящата на този ъгъл.

Дадено:

$OL^{\rightarrow}$ – ъглополовяща на $\sphericalangle AOB$,

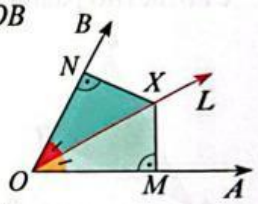
точка X – вътрешна на $\sphericalangle AOB$

$XM \perp OA$ и $XN \perp OB$

$XM = XN$

Да се докаже:

$X \in OL^{\rightarrow}$



Доказателство:

Разглеждаме ΔOMX и ΔONX – правоъгълни

1) $XM = XN$ (по условие)

2) OX – обща страна

$\Rightarrow \Delta OMX \cong \Delta ONX$ по признака за еднаквост на правоъгълни триъгълници

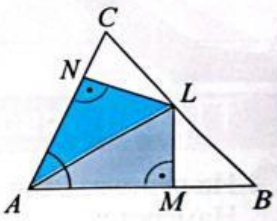
$\Rightarrow \sphericalangle MOX = \sphericalangle NOX$ (съответни ъгли).

Следователно $X \in OL^{\rightarrow}$.

1 На чертежа точка L лежи на страната BC на остроъгълния ΔABC, а LM и LN са разстоянията от точка L съответно до страните AB и AC.

а) Ако AL е ъглополовяща на $\sphericalangle BAC$ и $LM = 7{,}7$ cm, намерете LN.

б) Ако $LM = LN$ и $\sphericalangle BAC = 70°$, намерете мерките на $\sphericalangle MAL$ и $\sphericalangle ALN$.



Решение:

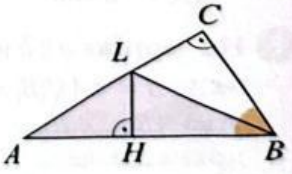
а) От условието, че точка L е от ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$ и LM и LN са разстоянията до раменете на ъгъла, следва, че $LM = LN = 7{,}7$ cm.

б) От това, че LM и LN са разстоянията от точка L до раменете на ъгъл BAC и $LM = LN$, следва, че AL е ъглополовяща на $\sphericalangle BAC$, т.е.

$$\sphericalangle MAL = \sphericalangle NAL = \frac{70°}{2} = 35°.$$

От ΔALN – правоъгълен, следва, че $\sphericalangle ALN = 90° - 35° = 55°$.

2 Даден е правоъгълен ΔABC с ъглополовяща BL и хипотенуза $AB = 8$ cm. Ако $LC = 3{,}5$ cm, намерете лицето на ΔABL.



Решение:

Нека LH е разстоянието от точка L до страната AB.

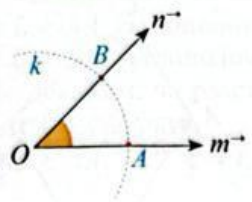
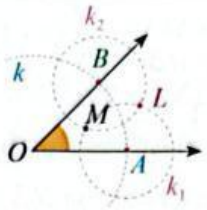
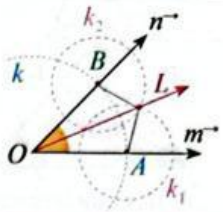
От това, че L лежи на ъглополовящата на $\sphericalangle ABC \Rightarrow LH = LC = 3{,}5$ cm.

$$S_{\Delta ABL} = \frac{AB \cdot LH}{2} = \frac{8 \cdot 3{,}5}{2} = 14 \text{ cm}^2$$

Scanned with CamScanner
LIVEWORKSHEETS

3 Даден е $\sphericalangle Omn$. Постройте с линийка и пергел ъглополовящата на $\sphericalangle Omn$.

Решение:

Първа стъпка:	Втора стъпка:	Трета стъпка:
		
Построяваме окръжност $k(O; r)$. $k \cap Om^{\rightarrow} = A$ $k \cap On^{\rightarrow} = B$	Построяваме окръжности $k_1(A; r_1)$ и $k_2(B; r_1)$, $r_1 < r$ $k_1 \cap k_2 = (L, M)$	Построяваме лъч $OL^{\rightarrow}$. Ще докажем че лъчът $OL^{\rightarrow}$ е ъглополовяща на $\sphericalangle Omn$.

Разглеждаме ΔAOL и ΔBOL.

1) $OA = OB = r$ – по построение
2) $AL = BL = r_1$ – по построение
3) OL – обща страна

$\Rightarrow \Delta AOL \cong \Delta BOL$ по трети признак.
$\Rightarrow \sphericalangle AOL = \sphericalangle BOL$ (съответни ъгли).

Следователно лъчът $OL^{\rightarrow}$ е ъглополовяща на $\sphericalangle Omn$.

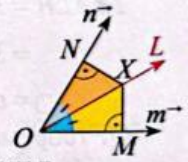
Какво научих

Знам теореми за ъглополовяща на ъгъл.

$OL^{\rightarrow}$ е ъглополовяща на $\sphericalangle Omn$ и точка X е от вътрешността на $\sphericalangle Omn$.

$XM \perp Om^{\rightarrow}$ и $XN \perp On^{\rightarrow}$

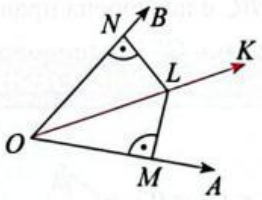
свойство	*признак*
Ако $X \in OL^{\rightarrow}$,	Ако $XM = XN$,
то $XM = XN$.	то $X \in OL^{\rightarrow}$.



Мога да построявам с линия и пергел ъглополовяща на ъгъл.

Проверявам какво знам

4 На чертежа лъчът $OK^{\rightarrow}$ е вътрешен за $\sphericalangle AOB$. Точка $L \in OK^{\rightarrow}$, а LM и LN са разстоянията от точка L съответно до $OA^{\rightarrow}$ и $OB^{\rightarrow}$.



а) Ако $OK^{\rightarrow}$ е ъглополовяща на $\sphericalangle AOB$ и $LM + LN = 12{,}6$ cm, намерете дължината на LN.

б) Ако $LM = LN$ и $\sphericalangle AOB = 66°$, намерете мярката $\sphericalangle AOK$.

5 В остроъгълния ΔABC $\sphericalangle ACB = 50°$. Ако CL е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$ и LM и LN са разстоянията от точка L съответно до страните AC и BC, намерете ъглите на ΔMLN.

6 В правоъгълния ΔABC $(\sphericalangle ACB = 90°)$ BL е ъглополовяща. Ако LH е разстоянието от точка L до страната AB и $CL = AH$, докажете, че:
а) ΔAHL е равнобедрен;
б) ΔABC е равнобедрен.

7 Даден е ΔABC с ъглополовяща CL $(L \in AB)$. Разстоянието от точка L до страната BC е равно на 8 cm. Ако $CL = BL = 16$ cm, намерете:
а) ъглите на ΔABC; **б)** дължината на страната AB.

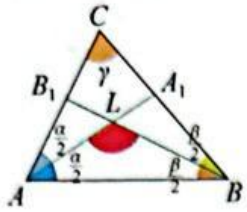
Scanned with CamScanner
LIVEWORKSHEETS

119

УПРАЖНЕНИЕ. ЪГЛОПОЛОВЯЩА НА ЪГЪЛ

1 Разгледайте някои основни задачи за ъглополовящи в триъгълник и докажете твърденията в тях.

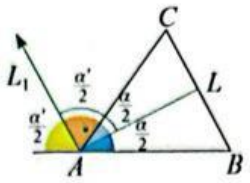
а)



Ако ъглополовящите AA_1 и BB_1 на ΔABC се пресичат в точка L и $\sphericalangle ACB = \gamma$,

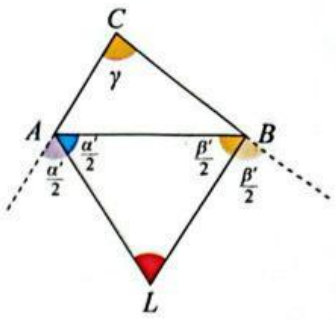
то $\boxed{\sphericalangle ALB = 90° + \frac{\gamma}{2}}$.

б)



Ако AL и AL_1 са ъглополовящи съответно на вътрешния и външния ъгъл при върха A на ΔABC, то $\boxed{\sphericalangle L_1AL = 90°}$.

в)



Ако AL и BL са ъглополовящи съответно на външните ъгли при върховете A и B на ΔABC и $\sphericalangle ACB = \gamma$,

то $\boxed{\sphericalangle ALB = 90° - \frac{\gamma}{2}}$.

Упътване:

в) От теорема за сбор на ъглите на ΔABL следва, че

$$\sphericalangle ALB = 180° - \frac{\alpha'}{2} - \frac{\beta'}{2} \;|.\,2 \Leftrightarrow 2\sphericalangle ALB = 360° - \alpha' - \beta'$$

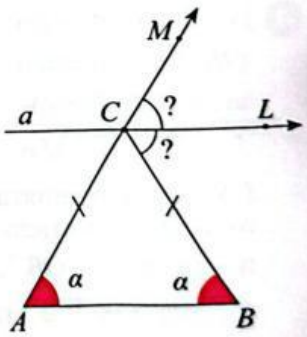
Знаем, че $\alpha' = 180° - \alpha$ (съседни ъгли) и
$\beta' = 180° - \beta$ (съседни ъгли)
Тогава получаваме

$$\begin{aligned} 2\sphericalangle ALB &= 360° - (180° - \alpha) - (180° - \beta) \\ &= 360° - 180° + \alpha - 180° + \beta \\ &= \alpha + \beta. \end{aligned}$$

От теорема за сбор на ъглите на ΔABC следва, че
$\alpha + \beta = 180° - \gamma$.

Следователно $2\sphericalangle ALB = 180° - \gamma \;|:2 \Leftrightarrow \sphericalangle ALB = 90° - \frac{\gamma}{2}$.

2 На чертежа през върха C на равнобедрения ΔABC е построена правата a, успоредна на основата му AB. Докажете, че лъчът $CL^{\rightarrow}$ е ъглополовяща на външния ъгъл BCM на ΔABC.



Решение:

Ще докажем, че $\sphericalangle BCL = \sphericalangle MCL$.

От това, че ΔABC е равнобедрен $(AC = BC) \Rightarrow \sphericalangle A = \sphericalangle B = \alpha$.

От това, че $\sphericalangle BCM$ е външен ъгъл за $\Delta ABC \Rightarrow \sphericalangle BCM = \sphericalangle A + \sphericalangle B = 2\alpha$.

От $(a \parallel AB) \cap BC \Rightarrow \sphericalangle BCL = \sphericalangle B = \alpha$ като кръстни ъгли.

$\sphericalangle MCL = \sphericalangle BCM - \sphericalangle BCL = 2\alpha - \alpha = \alpha$

Получихме, че $\sphericalangle BCL = \alpha = \sphericalangle MCL$.

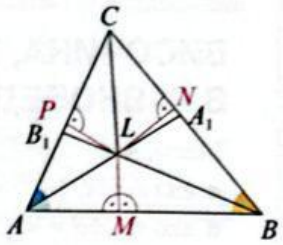
Следователно $CL^{\rightarrow}$ е ъглополовяща на $\sphericalangle BCM$.

Scanned with CamScanner
LIVEWORKSHEETS

3 Ъглополовящите AA_1 и BB_1 на ΔABC се пресичат в точка L. Отсечките LM, LN и LP са разстоянията от точка L съответно до страните AB, BC и AC.

а) Ако $LM = 2$ cm, намерете LP и LN.

б) Докажете, че CL е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$.



Решение:

а) От $L \in AA_1$ (ъглополовяща на $\sphericalangle BAC$) $\Rightarrow LP = LM = 2$ cm.
От $L \in BB_1$ (ъглополовяща на $\sphericalangle ABC$) $\Rightarrow LN = LM = 2$ cm.

б) Ще докажем, че разстоянията LN и LP от точка L до раменете на $\sphericalangle ACB$ са равни.

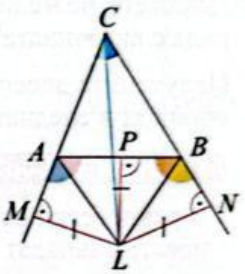
От $L \in AA_1 \Rightarrow LM = LP$
От $L \in BB_1 \Rightarrow LM = LN$
$\Rightarrow LP = LN$, но това са разстояния до раменете на $\sphericalangle ACB$, следователно CL е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$.

Така доказахме, че трите ъглополовящи на вътрешните ъгли на един триъгълник се пресичат в една точка L, която се намира на равни разстояния от страните му ($LM = LP = LN$).

ПРАКТИЧЕСКО ПРАВИЛО

За да докажем, че вътрешен лъч е ъглополовяща на ъгъл, може да използваме един от начините:
1) Доказваме, че лъчът разделя дадения ъгъл на два равни ъгъла.
2) Доказваме, че точка от лъча се намира на равни разстояния от раменете на ъгъла.

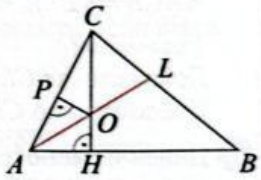
4 На чертежа ъглополовящите на външните ъгли при върховете A и B на ΔABC се пресичат в точка L. Докажете, че CL е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$.



Доказателство:
Построяваме разстоянията LM, LP и LN от точка L съответно до правите AC, AB и BC.

От AL – ъглополовяща на $\sphericalangle MAB \Rightarrow LM = LP$
От BL – ъглополовяща на $\sphericalangle ABN \Rightarrow LN = LP$
$\Rightarrow LM = LN$, но това са разстояния до раменете на $\sphericalangle MCN$, следователно CL е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$.

5 На чертежа ΔABC е остроъгълен. Височината CH и ъглополовящата AL се пресичат в точка O и OP е разстоянието от точка O до страната AC. Кое от следните твърдения НЕВИНАГИ е вярно?

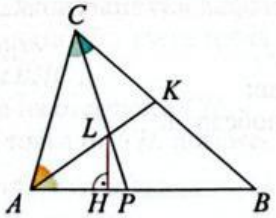


А) $OH = OP$ **Б)** $\Delta AOH \cong \Delta AOP$

В) $OP = OL$ **Г)** $\overrightarrow{OA}$ е ъглополовяща на $\sphericalangle HOP$.

Проверявам какво знам

6 На чертежа ъглополовящите AK и CP на ΔABC се пресичат в точка L, а $LH = 2{,}2$ cm е разстоянието от точка L до страната AB. Ако $CL = 4{,}4$ cm, намерете мярката на $\sphericalangle ACB$.



7 В остроъгълния ΔABC точка M е средата на страната AB. Ако MH и MD са разстоянията от точка M съответно до страните AC и BC и $MH = MD$, докажете, че:
а) $\Delta AMH \cong \Delta BMD$; **б)** ΔABC е равнобедрен.

8 Ако ъглополовящата на външния ъгъл при върха A на ΔABC е успоредна на страната BC, докажете, че ΔABC е равнобедрен с основа BC.

9 Даден е ΔABC с ъглополовяща AL. През точка L е построена права, успоредна на AB, която пресича страната AC в точка M. Докажете, че ΔALM е равнобедрен.

Scanned with CamScanner
LIVEWORKSHEETS