CĐ 6 MỘT SỐ YẾU TỐ XÁC SUẤT

I Kiến thức cần nhớ

1 Đại số tổ hợp

a) Quy tắc cộng

Định nghĩa 6.1. Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động thứ nhất có m cách thực hiện, hành động thứ hai có n cách thực hiện (các cách thực hiện của cả hai hành động là khác nhau đôi một) thì công việc đó có $m+n$ cách hoàn thành.
Quy tắc cộng có thể mở rộng cho một công việc được hoàn thành bởi một trong k hành động ($k \in \mathbb{N}, k > 2$).

b) Quy tắc nhân

Định nghĩa 6.2. Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu hành động thứ nhất có m cách thực hiện và ứng với mỗi cách thực hiện hành động thứ nhất, có n cách thực hiện hành động thứ hai thì công việc đó có $m \cdot n$ cách hoàn thành.
Quy tắc nhân có thể mở rộng cho một công việc được hoàn thành bởi k hành động liên tiếp ($k \in \mathbb{N}, k > 2$).

c) Hoán vị

Định nghĩa 6.3. Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \in \mathbb{N}^*$). Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một hoán vị của n phần tủ đó.

Kí hiệu P_n là số các hoán vị của n phần tử. Ta có

Định lí 6.1.
$$P_n = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 = n!.$$

d) Chỉnh hợp

Định nghĩa 6.4. Cho tập hợp A gồm n phần tử và một số nguyên k với $1 \leq k \leq n$. Mỗi kết quả của việc lấy k phần tử từ n phần tử của tập hợp A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉh hợp chập k của n phần tủ đã cho.

Kí hiệu A_n^k là số các chỉnh hợp chập k của n phần tử. Ta có

Định lí 6.2.
$$\mathrm{A}_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

e) Tổ hợp

Định nghĩa 6.5. Cho tập hợp A gồm n phần từ và một số nguyên k với $1 \leq k \leq n$. Mỗi tập con gồm k phần tử được lấy ra từ n phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử đó.

Kí hiệu C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần từ với $1 \leq k \leq n$. Ta có

Định lí 6.3.
$$\mathrm{C}_n^k = \frac{\mathrm{A}_n^k}{k!}.$$

LIVEWORKSHEETS

Quy ước $0! = 1, C_n^0 = 1$. Với những quy ước đó, ta có $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} (0 \le k \le n)$.

2 Xác suất của biến cố

a) Một số khái niệm

Định nghĩa 6.6. Không gian mẫu Ω là tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của một phép thử.

Định nghĩa 6.7. Biến cố ngẫu nhiên (gọi tắt là biến cố) là một tập con của không gian mẫu. Tập rỗng $\varnothing$ là biến cố không thể, Ω là biến cố chắc chắn, $\overline{A} = \Omega \backslash A$ là biến cố đối của biến cố A.

Xét phép thử chỉ có một số hữu hạn kết quả có thể xảy ra và khả năng xảy ra của từng kết quả là giống nhau. Gọi Ω là không gian mẫu của phép thử đó. Khi đó, với mỗi biến cố A, ta có định nghĩa cổ điển của xác suất như sau

Định nghĩa 6.8. Xác suất của biến cố A, kí kiệu là $P(A)$, bằng tỉ số $\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$, ở đó $n(A), n(\Omega)$ lần lượt là số phần tử của hai tập hợp A, Ω. Như vậy

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

b) Tính chất của xác suất

Xét phép thử T với không gian mẫu là Ω. Khi đó, ta có các tính chất sau

Tính chất 6.1.
- $P(\varnothing) = 0; P(\Omega) = 1;$
- $0 \le P(A) \le 1$ *với mỗi biến cố* A;
- $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$ *với mỗi biến cố* A.

c) Biến cố hợp, biến cố giao. Hai biến cố xung khắc, hai biến cố độc lập

Định nghĩa 6.9. Cho hai biến cố A và B cùng liên quan đến phép thử T và các kết quả của T là đồng khả năng. Khi đó A, B là các tập con của không gian mẫu.

- Đặt $C = A \cup B$. Khi đó C là một biến cố và được gọi là biến cố hợp của hai biến cố A và B, kí hiệu là $A \cup B$.
- Đặt $D = A \cap B$. Khi đó D là một biến cố và được gọi là biến cố giao của hai biến cố A và B, kí hiệu là $A \cap B$ hay AB.
- Nếu $A \cap B = \varnothing$ thì A và B gọi là hai biến cố xung khắc.
- Hai biến cố A và B được gọi là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố kia.

Nhận xét.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Nếu hai biến cố A và B là độc lập thì $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

LIVEWORKSHEETS

3 Xác suất có điều kiện

Định nghĩa 6.10. Cho hai biến cố A và B. Xác suất của biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra được gọi là xác suất của A với điều kiện B, kí hiệu là $P(A \mid B)$. Nếu $P(B) > 0$ thì $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Từ định nghĩa của xác suất có điều kiện, ta suy ra
Nếu $P(B) > 0$ thì $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B)$.

Nhận xét.

- Nếu A, B là hai biến cố bất kì thì $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = P(B) \cdot P(A \mid B)$.
  Công thức trên được gọi là công thức nhân xác suất.
- Cho hai biến cố A và B với $P(B) > 0$. Khi đó, ta có $P(A \mid B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(B)}$.
- Cho hai biến cố A, B với $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$. Khi đó, A và B là hai biến cố độc lập khi và chỉ khi $P(A) = P(A \mid B) = P(A \mid \overline{B})$ và $P(B) = P(B \mid A) = P(B \mid \overline{A})$.

4 Công thức xác suất toàn phần. Công thức Bayes

a) Công thức xác suất toàn phần

Định lí 6.4. *Cho hai biến cố A, B với $0 < P(B) < 1$, ta có*

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(B) \cdot P(A \mid B) + P(\overline{B}) \cdot P(A \mid \overline{B}).$$

b) Công thúc Bayes

Định lí 6.5. *Cho hai biến cố A, B với $P(A) > 0, P(B) > 0$, ta có*

$$P(B \mid A) = \frac{P(B) \cdot P(A \mid B)}{P(A)}.$$

Nhận xét. Với $P(A) > 0, 0 < P(B) < 1$ thì công thức Bayes còn có dạng

$$P(B \mid A) = \frac{P(B) \cdot P(A \mid B)}{P(B) \cdot P(A \mid B) + P(\overline{B}) \cdot P(A \mid \overline{B})}.$$

LIVEWORKSHEETS