

1 Teknik Substitusi (Penggantian)

Teknik integrasi substitusi ini, teknik dilakukan diawal dalam penyelesaian integrasi. Apabila menggunakan teknik ini tidak bisa dilakukan maka dapat diterapkan teknik yang lain.

Contoh 1

$$\int f(x) dx = \int h(u) du = H(u) + C = H(g(x)) + C$$

Tentukan $\int \frac{3}{\sqrt{5-9x^2}} dx$

Penyelesaian :

Ingatlah bentuk $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$ Andaikan $u = 3x$. Maka $du = 3 dx$

Sehingga

$$\int \frac{3}{\sqrt{5-9x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{5-u^2}} du = \sin^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{5}}\right) + C = \sin^{-1}\left(\frac{3x}{\sqrt{5}}\right) + C$$

Contoh 2

Selesaikan $\int \frac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}} dx$

Penyelesaian

$$\int \frac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}} dx = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = 2u^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x^2-9x+1} + C$$

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{x^2-9x+1} \\ du &= (2x-9) dx \end{aligned}$$

Contoh 3

Selesaikan $\int (\sec x + \tan x)^2 dx$

Penyelesaian

Untuk menyelesaikan integrasi ini, fungsi harus dikuadratkan terlebih dahulu.

$$\begin{aligned} \int (\sec x + \tan x)^2 dx &= \int \sec^2 x + 2 \sec x \tan x + \tan^2 x dx \\ &= \int \sec^2 x dx + 2 \int \sec x \tan x dx + \int \tan^2 x dx \\ &= \int \sec^2 x dx + 2 \int \sec x \tan x dx + \int \sec^2 x - 1 dx \\ &= \int \sec^2 x dx + 2 \int \sec x \tan x dx - \int 1 dx \\ &= 2 \tan x + C_1 + 2 \sec x + C_2 - x + C_3 \end{aligned}$$

$$= 2 \tan x + 2 \sec x - x + C$$

Contoh 4

Selesaikan $\int \frac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Penyelesaian

$$\int \frac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}} dx = 3 \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx + 2 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Misal: $u = 1 - x^2$

$$du = -2x dx \text{ dan } x dx = -\frac{1}{2} du$$

$$3 \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = 3 \int \frac{-\frac{1}{2} du}{\sqrt{u}} = -\frac{3}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du$$

$$= -\frac{3}{2} \cdot \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C_1 = -3\sqrt{1-x^2} + C_1$$

$$\text{Dan, } 2 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2 \sin^{-1} x + C_2$$

Sehingga

$$3 \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -3\sqrt{1-x^2} + C_1 + 2 \sin^{-1} x + C_2 = -3\sqrt{1-x^2} + 2 \sin^{-1} x + C$$

Contoh 5

Tentukan $\int \frac{7}{x^2 - 6x + 25} dx$

Penyelesaian :

Suatu integran yang penyebutnya berbentuk suatu kuadrat kerap kali dapat dirubah menjadi bentuk baku setelah melengkapkannya menjadi sebuah kuadrat.

Ingat bahwa $x^2 + bx$ menjadi suatu kuadrat dengan menambahkan $(b/2)^2$

$$\begin{aligned} \int \frac{7}{x^2 - 6x + 25} dx &= \int \frac{7}{x^2 - 6x + 9 + 16} dx \\ &= 7 \int \frac{1}{(x-3)^2 + 4^2} d(x-3) \\ &= \frac{7}{4} \tan^{-1} \left(\frac{x-3}{4} \right) + C \end{aligned}$$

Dalam pikiran, kita gunakan penggantian $u = x - 3$

Contoh 6

Tentukan $\int_2^5 t\sqrt{t^2-4} dt$

Penyelesaian :

Andaikan $u = t^2 - 4$, dengan demikian $du = 2t$; perhatikan bahwa $u = 0$ jika $t = 2$ dan $u = 21$ jika $t = 5$. Jadi,

$$\begin{aligned}\int_2^5 t\sqrt{t^2-4} dt &= \frac{1}{2} \int_2^5 (t^2-4)^{1/2} (2t dt) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{21} u^{1/2} du \\ &= \left[\frac{1}{3} u^{3/2} \right]_0^{21} = \frac{1}{3} (21)^{3/2} \approx 32,08\end{aligned}$$

Contoh 7

Selesaikan $\int \sec x dx$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\int \sec x dx &= \int \sec x \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} dx \\ &= \int \frac{\sec x (\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx \\ &= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx \\ \text{mis. } u &= \sec x + \tan x; \quad \frac{du}{dx} = \sec x \tan x + \sec^2 x \\ &= \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \ln|\sec x + \tan x| + C\end{aligned}$$

Latihan Soal

Selesaikan integral berikut.

1. $\int \frac{dx}{x^2+4}$
2. $\int \frac{x dx}{x^2+4}$
3. $\int 6z\sqrt{4+z^2} dz$
4. $\int e^{\cos z} \sin z dz$
5. $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx$
6. $\int \frac{\sin a - \cos a}{\sin a} da$
7. $\int \frac{3e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$
8. $\int \frac{\sin(4t-1)}{1-\sin^2(4t-1)} dt$
9. $\int \frac{t^2 \cos(t^3-2)}{\sin^2(t^3-2)} dt$
10. $\int \frac{t^2 \cos^2(t^3-2)}{\sin^2(t^3-2)} dt$
11. $\int \frac{y}{\sqrt{16-9y^4}} dy$
12. $\int \frac{5}{\sqrt{9-4y^2}} dy$

$$13. \int \frac{e^{3t}}{\sqrt{4-e^{6t}}} dt$$

$$14. \int \frac{e^{2t}-e^{-2t}}{e^{2t}+e^{-2t}} dt$$

$$15. \int \frac{1}{x^2+2x+5} dx$$

$$16. \int \frac{1}{\sqrt{16+6x-x^2}} dx$$

$$17. \int \csc(\pi x - 1) dx$$

$$18. \int \frac{\cot(3+\ln x)}{x} dx$$

$$19. \int x \sec(x^2 - 5) dx$$

$$20. \int \frac{2^{\ln x}}{x} dx$$

2 Integral Parsial

Pengintegralan Parsial Integral tak tentu : $\int u dv = uv - \int v du$

Pengintegralan Parsial Integral Tentu : $\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$

Pada integrasi parsial, diperlukan **pemilihan u dan dv yang tepat**, sehingga bisa diintegalkan.

Contoh 1

Selesaikan $\int x \cos x dx$

Penyelesaian

Sesuaikan bentuk integrasi dalam integral parsial

$$\int x \cos x dx = \int u dv$$

Terdapat 4 kemungkinan pemisalan:

1. misalkan $u = 1$ dan $dv = x \cos x dx$
2. misalkan $u = x \cos x$ dan $dv = dx$
3. misalkan $u = \cos x$ dan $dv = x dx$
4. misalkan $u = x$ dan $dv = \cos x dx$

kemungkinan (1)

tidak dapat dilakukan karena kita tidak dapat menyelesaikan integrasi $dv = x \cos x dx$

kemungkinan (2)

$$\begin{aligned} u &= x \cos x, & dv &= dx \\ du &= (\cos x - x \sin x) dx, & v &= \int dx = x \end{aligned}$$

sehingga terdapat integral baru

$$\int x \cos x dx = x^2 \cos x - \int (x \cos x - x^2 \sin x) dx$$

Permasalahan lebih rumit

Kemungkinan (3)

$$u = \cos x$$

$$du = \sin x \, dx$$

$$dv = x \, dx$$

$$v = \int x \, dx = \frac{1}{2} x^2$$

sehingga

$$\int x \cos x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \cos x - \int \frac{1}{2} x^2 \sin x \, dx$$

Permasalahan lebih rumit

Kemungkinan (4)

$$u = x$$

$$du = dx$$

$$dv = \cos x \, dx$$

$$v = \int \cos x \, dx = \sin x$$

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C$$

Dari keempat kemungkinan hanya kemungkinan (4) yang dapat diselesaikan.

Contoh 2

Tentukan $\int_1^e \ln x \, dx$

Penyelesaian :

Kita gunakan penggantian ganda berikut

$$u = \ln x$$

$$dv = dx$$

$$du = \left(\frac{1}{x}\right) dx$$

$$v = x$$

Sehingga

$$\int_1^e \ln x \, dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \frac{1}{x} \, dx$$

$$= e \ln e - \int_1^e dx$$

$$= e - [x]_1^e = e - e + 1 = 1$$

Contoh 3

Selesaikan $\int x e^x \, dx$

Penyelesaian

Karena fungsi yang diintegrasikan adalah perkalian dari dua fungsi transenden maka harus menggunakan integral parsial

$$u = x$$

$$dv = e^x dx$$

$$du = dx$$

$$v = \int e^x dx = e^x$$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$$

Contoh 4

Selesaikan $\int x^2 e^x dx$

Penyelesaian

$$u = x^2$$

$$dv = e^x dx$$

$$du = 2x dx$$

$$v = \int e^x dx = e^x$$

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \\ &= x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + C \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C \end{aligned}$$

Latihan Soal

1. $\int x \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx$

2. $\int \theta \cos \pi \theta d\theta$

3. $\int t^2 \cos t dt$

4. $\int x \ln x dx$

5. $\int \arctan y dy$

6. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

7. $\int x \cos^2 x \sin x dx$

8. $\int x \sec^2 x dx$

9. $\int r^2 \sin r dr$

10. $\int e^a \cos a da$

3 Teknik Integrasi Dari Fungsi Trigonometri

Jenis 1 : $\int \sin^n x dx, \int \cos^n x dx$

Perhatikan pertama apabila ***n* bilangan bulat positif ganjil**, gunakan kemudian persamaan **$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$** .

Untuk ***n* bilangan bulat positif genap**, persamaan yang digunakan adalah **sudut rangkap atau setengah sudut**, yaitu:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \text{dan} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Contoh 1 (*n* ganjil).

Tentukan $\int \sin^5 x \, dx$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}\int \sin^5 x \, dx &= \int \sin^4 x \sin x \, dx \\&= \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x \, dx \\&= \int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \sin x \, dx \\&= -\int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) d(\cos x) \\&= -\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + C\end{aligned}$$

Contoh 2

Tentukan $\int \cos^5 x \, dx$

Penyelesaian

$$\begin{aligned}\int \cos^5 x \, dx &= \int \cos^4 x \cos x \, dx \\&= \int (1 - \sin^2 x)^2 \cos x \, dx \\&= \int (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) \cos x \, dx \\&= \int (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) d(\sin x) \\&= \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C\end{aligned}$$

Contoh 3

Tentukan $\int \sin^4 x \, dx$

Penyelesaian

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x \, dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx \\&= \int \frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} dx \\&= \frac{1}{4} \int 1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x \, dx \\&= \frac{1}{4} \int 1 \, dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x \, dx \\&= \frac{1}{4} \int 1 \, dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx + \frac{1}{8} \int (1 + \cos 4x) \, dx \\&= \frac{3}{8} \int 1 \, dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx + \frac{1}{8} \int \cos 4x \, dx \\&= \frac{3}{8} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \sin 4x + C\end{aligned}$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

Jenis 2 : $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$

Pilih ***m*** atau ***n*** **bilangan bulat positif, ganjil** diubah menggunakan persamaan **$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$** . Apabila ***m*** dan ***n*** **keduanya positif genap** gunakan ***rumus setengah sudut*** untuk mengurangi derajat integran.

Contoh 4

Tentukan $\int \sin^3 x \cos^{-6} x \, dx$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cos^{-6} x \, dx &= \int (1 - \cos^2 x)(\cos^{-6} x)(\sin x) \, dx \\ &= \int (\cos^{-6} x - \cos^{-4} x) d(\cos x) \\ &= -\left[\frac{(\cos x)^{-5}}{-5} - \frac{(\cos x)^{-3}}{-3} \right] + C \\ &= \frac{1}{5} \sec^5 x - \frac{1}{3} \sec^3 x + C \end{aligned}$$

Contoh 5

Selesaikan $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$

Penyelesaian

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \int 1 - \cos^2 2x \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{4} \int \cos^2 2x \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{8} \int 1 + \cos 4x \, dx \\ &= \frac{1}{8}x - \frac{1}{4}\sin 4x + C \end{aligned}$$

Jenis 3 : $\int \tan^n x \, dx, \int \cot^n x \, dx$

Untuk $\int \tan^n x \, dx$ dapat memfaktorkan $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ atau menggunakan formula berikut.

$$\int \tan^n x \, dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x \, dx$$

Untuk $\int \cot^n x \, dx$ dapat memfaktorkan $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$

Contoh 6

Tentukan $\int \tan^5 x \, dx$

Penyelesaian

$$\begin{aligned} \int \tan^5 x \, dx &= \frac{1}{5-1} \tan^{5-1} x - \int \tan^3 x \, dx \\ &= \frac{1}{4} \tan^4 x - \left(\frac{1}{2} \tan^2 x - \int \tan x \, dx \right) \\ &= \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln|\cos x| + C \quad \text{ingat } \int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| \end{aligned}$$

Contoh 7

Tentukan $\int \cot^4 x \, dx$

Penyelesaian

$$\begin{aligned} \int \cot^4 x \, dx &= \int \cot^2 x (\csc^2 x - 1) \, dx \\ &= \int \cot^2 x \csc^2 x \, dx - \int \cot^2 x \, dx \\ &= -\int \cot^2 x \, d(\cot x) - \int (\csc^2 x - 1) \, dx \\ &= -\frac{1}{3} \cot^3 x + \cot x + x + C \end{aligned}$$

Jenis 4 : $\int \tan^m x \sec^n x \, dx, \int \cot^m x \csc^n x \, dx$

Menggunakan persamaan $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ dan $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$

Contoh 8 (n genap, m sebarang)

Tentukan $\int \tan^{-3/2} x \sec^4 x \, dx$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} \int \tan^{-3/2} x \sec^4 x \, dx &= \int (\tan^{-3/2} x)(1 + \tan^2 x) \sec^2 x \, dx \\ &= \int (\tan^{-3/2} x) \sec^2 x \, dx + \int (\tan^{1/2} x) \sec^2 x \, dx \\ &= -2 \tan^{-1/2} x + \frac{2}{3} \tan^{3/2} x + C \end{aligned}$$

Jenis 5 : $\int \sin mx \cos nx \, dx, \int \sin mx \sin nx \, dx, \int \cos mx \cos nx \, dx$

Persamaan yang digunakan adalah

a) $\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$

b) $\sin mx \sin nx = -\frac{1}{2} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$

c) $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$

Contoh 9

Tentukan $\int \sin 2x \cos 3x \, dx$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}\int \sin 2x \cos 3x \, dx &= \frac{1}{2} \int [\sin 5x + \sin(-x)] \, dx \\ &= \frac{1}{10} \int \sin 5x \, d(5x) - \frac{1}{2} \int \sin x \, dx \\ &= -\frac{1}{10} \cos 5x + \frac{1}{2} \cos x + C\end{aligned}$$

Latihan Soal

Selesaikan integral berikut.

1. $\int \cos^7 t \, dt$
2. $\int \sin^6 t \, dt$
3. $\int \cos^7 x \sin^4 x \, dx$
4. $\int \sin^4 x \cos^4 x \, dx$
5. $\int \sin 4y \cos 5y \, dy$
6. $\int \cos y \cos 5y \, dy$
7. $\int \cot^5 u \, du$
8. $\int \tan^{-3} x \sec^4 x \, dx$
9. $\int 8 \cos^4 2\pi t \, dt$
10. $\int \tan^4 \left(\frac{x}{4}\right) \, dx$