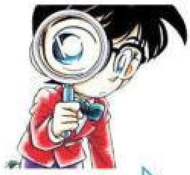
INTEGRALTAK TENTU

KELAS XI

LEMBAR KERJA PESERTA DIDIK



Capaian pembelajaran

Di akhir fase F, peserta didik dapat memahami laju perubahan dan laju perubahan rata-rata, serta laju perubahan sesaat sebagai konsep kunci derivatif (turunan), baik secara geometris maupun aljabar. Mereka dapat menentukan turunan dari fungsi polinomial, eksponensial, dan trigonometri, dan menerapkan derivatif (turunan) untuk membuat sketsa kurva, menghitung gradien dan menentukan persamaan garis singgung, menentukan kecepatan sesaat dan menyelesaikan soal optimasi. Mereka dapat memahami integral, baik sebagai proses yang merupakan kebalikan dari derivatif (turunan) dan juga sebagai cara menghitung luas. Mereka memahami teorema dasar kalkulus sebagai penghubung antara derivatif (turunan) dan integral.

Tujuan Pembelajaran

- Menentukan anti turunan dari fungsi aljabar dengan menggunakan konsep integral tak tentu sebagai kebalikan dari turunan fungsi.
- Menentukan integral dengan rumus dasar integral
- Menggunakan sifat dasar integral tak tentu.
- Menentukan persamaan kurva
- Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan integral tak tentu (anti turunan) fungsi aljabar

NAMA KELOMPOK :

1.

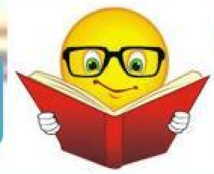
2.

3.

4.

5.

PART 1



Integral Tak Tentu Sebagai Kebalikan Dari Turunan Fungsi

Ingat Rumus Turunan Fungsi:
Misalkan $F\,(x)$adalah fungsi bernilai real dan dapat diturunkan pada interval I, a bilangan real, maka:

- ❖ $F(x) = x^n$ turunannya $F'(x) = f\,(x) = n\,x^{n-1}$,
- ❖ $F(x) = a\,x^n$ turunannya $F'^{(x)} = f\,(x) = an\,x^{n-1}$,

Perhatikan fungsi-fungsi berikut, dan turunkan masing-masing fungsi dengan mengisi titik-titik yang ada:

1. $F\,(x) = \frac{1}{3}x^3$ maka $F'(\,x\,) = f\,(\,x) = y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^{\,3}\right) = \ \frac{1}{3}\cdot 3\ \cdot\ x^{3-\,\cdots} = \ x^{\,\cdots\cdots}$

2. $F\,(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5$ maka

$$F'(\,x\,) = f\,(\,x) = y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^{\,3}\ +5\right) = \frac{1}{3}\times \ldots.\times x^{3-1} = x^{\cdots\cdots}$$

3. $F\,(x) = \frac{1}{3}x^3 - 7$ maka

$$F'(\,x\,) = f\,(\,x) = y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^{\,3} - 7\right) = \ \frac{1}{3}\cdot 3\ \cdot\ x^{\cdots\cdots\ -1} = x^{\cdots\cdots}$$

4. $F\,(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}$ maka

$$F'(\,x\,) = f\,(\,x) = y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^{\,3}\ + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{3}\cdot 3\cdot x^{3-1} = x^2$$

5. $F\,(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{13}{200}$ maka

$$F'(\,x\,) = f\,(\,x) = y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^{\,3} - \frac{13}{200}\right) = \frac{1}{3}\cdot 3\cdot x^{3-1} = x^2$$

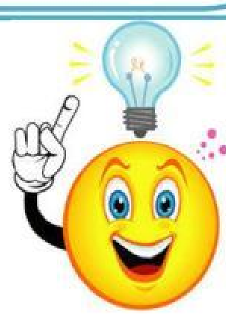
Amati kelima fungsi F (x) diatas.

1. Bagaimana turunan dari fungsi – fungsi tersebut? Hasil turunannya sama yaitux^2
2. Meskipun turunannya sama, apa yang membedakan masing-masing fungsi tersebut?Konstanta untuk setiap F(x) berbeda-beda, Jadi dapat ditunjukan bahwa setiap fungsi yang memiliki banyak antiturunan dengan konstanta yang berbeda
3. Lengkapi bagan berikut:

$$F(x) \xrightarrow{\text{TURUNAN}} f(x) \xrightarrow{\text{ANTI TURUNAN}} F(X)+C$$

Kesimpulan apa yang dapat kalian peroleh dari kegiatan diatas?
KESIMPULAN:
Jika F(x) adalah fungsi yang dapat diturunkan, yaitu f(x) maka anti turunan dari f(x) adalah F(x) + c, dengan c adalah sembarang konstanta.

Ayo Berlatih



Tentukan anti turunan dari fungsi-fungsi berikut:

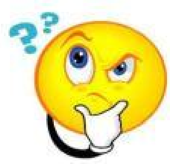
a. $f(x) = 2x$
Penyelesaian :
$$y = \frac{d}{dx}(2x) = \frac{2}{2}x^2 = x^{\cdots\cdots}$$

b. $f(x) = -\frac{3}{2}x$
Penyelesaian :
$$y = \frac{d}{dx}\left(\frac{-3}{2}x\right) = \frac{-3}{2}.\frac{1}{\cdots\cdots}x^2 = \frac{-3}{\cdots\cdots}x^2$$

c. $f(x) = 5x^{\frac{1}{3}}$
Penyelesaian :
$$y = \frac{d}{dx}\left(5x^{\frac{1}{3}}\right) = 5.\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} = \frac{\cdots\cdots}{4}x^{\frac{4}{3}}$$

PART 2

Rumus Dasar Integral



Tabel pola hubungan turunan dan anti turunan fungsi $y = ax^n$

Turunan fungsi $(f(x))$	Anti turunan fungsi $(f(x))$	Pola
1	x	$1x^0 \to \frac{1}{1}x^1 = \frac{1}{0+1}x^{0+1}$
$2x$	x^2	$2x^1 \to \frac{2}{2}x^2 = \frac{2}{1+1}x^{1+1}$
$3x^2$	x^3	$3x^2 \to \frac{3}{3}x^3 = \frac{3}{2+1}x^{2+1}$
$4x^3$	x^4	$4x^3 \to \frac{4}{4}x^4 = \frac{4}{3+1}x^{3+1}$
anx^{n-1}	ax^n	$anx^{n-1} \to \frac{a}{n}x^n = \frac{a}{(n-1)+1}x^{n-1+1}$
ax^n	$\frac{a}{n+1}x^{n+1}$	$ax^n \to \frac{a}{n+1}x^{n+1} = \frac{a}{n+\cdots}x^{n+1}$

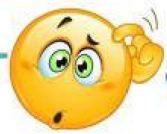
Dari pengamatan pada tabel tersebut, dapat dilihat sebuah aturan integral atau pola anti turunan dari turunannya yaitu $\int ax^n dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1}$ dengan n bilangan rasional.

Pola hubungan turunan dan anti turunan beberapa fungsi F(x)

Turunan fungsi $(f(x))$	Anti turunan fungsi $(f(x))$	Pola
$10x^9$	x^{10}	$10x^9 \to \frac{10}{10}x^{10} = \frac{2}{9+1}x^{9+1}$
$2x^{\cdots}$	x^2	$2x^1 \to \frac{2}{2}x^2 = \frac{2}{1+1}x^{1+1}$

$-36x^{11}$	$-3x^{12}$	$-36x^{11} \rightarrow \frac{-36}{12}x^{12} = \frac{-36}{11+\cdots}x^{11+1}$
$-15x^4 + 20x^4$	$-3x^5 + 4x^5$	$-15x^4 + 20x^4 \rightarrow \frac{-15}{5}x^5 + \frac{20}{5}x^5$ $= \frac{-15}{4+\cdots}x^{4+1} + \frac{20}{4+1}x^{\cdots+1}$

Berdasarkan uraian diatas, Dapat di tentukan syarat n pada $y = ax^n$ agar pola integrasi tersebut dapat berlaku secara umum



Agar integrasi berlaku secara umum, maka syarat n ≠1.

Kesimpulan :

Untuk $y = ax^n$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \text{ , n} \neq \text{-1}$$

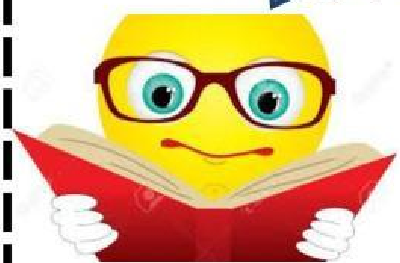
$$\int a.x^n dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + c \text{ , n} \neq \text{-1}$$

RUMUS DASAR INTEGRAL

1) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \text{ , n} \neq \text{-1}$

$$\int a.x^n dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + c \text{ , n} \neq \text{-1}$$

Contoh



Tentukan nilai $\int 4x^3 + 2x^2\, dx$

Alternatif Penyelesaian:

$$\int 4x^3 + 2x^2\, dx = \frac{4}{3+1}x^{3+1} + \frac{2}{2+1}x^{2+1} + c$$

$$= \frac{4}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + c$$

$$= x^4 + \frac{2}{3}x^3 + c$$

Mari Berlatih

Tentukan hasil pengintegralan berikut.

1. $\int -x^5 dx$

   Penyelesaian :

$$\int -x^5 dx = \frac{-1}{5+1} \ldots^{\ldots\ldots\ldots} + \cdots$$
$$= \frac{\ldots.}{\ldots..} \ldots^{\ldots} + \cdots$$

2. $\int (4x^8 + 2x^5 + 3)dx$

   Penyelesaian :

$$\int (4x^8 + 2x^5 + 3)dx = \frac{4}{8+1} x^{8+1} + \frac{2}{5+1} x^{5+1} + 3x + c$$

$$= \frac{\ldots.}{\ldots.} x^{\ldots\ldots} + \frac{\ldots.}{\ldots.} x^{\ldots\ldots} + \cdots x + c$$

3. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x}} dx$

Penyelesaian :

$$\int \frac{3x+2}{\sqrt{x}} dx = \int (3x+2) x^{\frac{-1}{2}} dx$$

$$= \int 3x^{\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{-1}{2}} dx$$

$$= \frac{3}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + \frac{2}{\frac{-1}{2}+1} x^{\frac{-1}{2}+1} + c$$

$$= \frac{3}{1} \times \frac{2}{\ldots} x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{1} \times \frac{2}{\ldots} x^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \cdots \sqrt{\ldots.} + \cdots \sqrt{\ldots.} + \cdots$$

4. $\int (x+5)^2\, dx$

Penyelesaian :

$$\int (x+5)^2\, dx = \int (x^2+10x+25) dx$$

$$= \frac{1}{2+1}x^{2+1} + \frac{10}{1+\cdots}x^{1+1} + \cdots x + c$$

$$= \frac{\cdots.}{\cdots.}x^{\cdots\cdots} + \cdots x^{\cdots\cdots} + \cdots + \cdots$$

Menentukan Persamaan Kurva

kalian telah mempelajari gradien dan persamaan garis singgung kurva di suatu titik. Jika $y = f(x)$, gradien garis singgung kurva di sembarang titik pada kurva adalah $y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$. Oleh karena itu, jika gradien garis singgungnya sudah diketahui persamaan kurvanya dapat ditentukan dengan :

$$y = \int f(x) dx = f(x) + c$$

example

Diketahui $\frac{dy}{dx} = 4x - 5$, dengan $\frac{dy}{dx}$ adalah turunan dari fungsi $y = f(x)$. Misal grafik fungsi $y = f(x)$ melalui titik (0,5). Bagaimana rumus fungsi tersebut?

Penyelesaian :

$$y = \int \left(\frac{dy}{dx}\right) dx$$

$$= \int (4x-5)\, dx$$

$$= 2x^2 - 5x + c$$

Kurva $y = 2x^2 - 5x + c$ melalui titik (0,5) sehingga

$5 = 2(0)^2 - 5(0) + c$

$5 = c$

Maka rumus fungsi yang dimaksud adalah $y = f(x) = 2x^2 - 5x + 5$

Gradien garis singgung suatu kurva di sembarang titik P(x,y) dirumuskan dengan $\frac{dy}{dx} = 3\sqrt{2x}$. Jika kurva melalui titik (4,3) tentukan persamaan kurva tersebut

Penyelesaian

$$y = \int \left(\frac{dy}{dx}\right) dx$$

$$= \int \left(3\sqrt{2x}\right) dx$$

$$= \int 3.2x^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \cdots \int x^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \cdots . \frac{1}{\frac{1}{\cdots} + 1} x^{\frac{1}{2}+1} + c$$

$$= \cdots . \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \cdots x\sqrt{x} + c$$

Kurva $y = 4x\sqrt{x} + c$ melalui titik (4,3) sehingga

$3 = 4.4\sqrt{4} + c$

$3 = \cdots + c$

$-\cdots = c$

Maka rumus fungsi yang dimaksud adalah $y = f(x) = 4x\sqrt{x} - \cdots$.

Menyelesaiakan masalah yang berkaitan dengan integral tak tentu

Pilihlah jawaban yang benar di bawah ini!

1

Diketahui kecepatan sebuah benda $v(t) = 6t^2$ dan jarak s(1)=8.

Tentukan rumus jarak s(t)

Penyelesaian

$$s(t) = \int v(t)dt$$

$$= \int (6t^2)dt$$

$$= \frac{6}{2+1}t^{2+1} + c$$

$$= 2t^3 + c$$

Saat s(1)=8 maka $s(t) = 2t^3 + c$

Tentukan jarak s(t)...

A. s(t) $=2t^2 + 4$
B. s(t) $= 2t^3 + 6$
C. s(t) $=2t^3 + 3$
D. s(t) $= 2t^2 + 2$

2

Biaya marginal (Mc) merupakan biaya tambahan akibat adanya tambahan produksi satu unit. Secara matematika, biaya ini merupakan turunan (diferensial) dari biaya total (C) terhadap x unit produksi. Misalkan diketahui biaya marginal per unit MC(x) = 600+2x dan biaya total bulanan RP6.000.000,00. Ketika x = 100 unitproduksi perbulan. Tentukan fungsi biaya total dalam memproduksi x unit barang perbulan.

Penyelesaian

$$\int (600 + 2x)dx$$

$$= 600x + x^2 + c$$

Ketika x = 100 unit, total biaya Rp6.000.000,00

Tentukan fungsi biaya totalnya...

A. $600x + x^2 + 5.300.000$
B. $600x + x^2 + 600.000$
C. $600x + x^2 + -5.300.000$
D. $600x + x^2 - 600.000$

3

Sebuah benda mulai bergerak dengan kecepatan awal 20 m/detik. Percepatannya pada saat t adalah (18-2t) m/detik^2. Tentukan kecepatannya setelah 6 detik dan jarak yang telah ditempuh setelah waktu ini jika jarak awal 5 m.

Penyelesaian

$$v(t) = \int d(t)dt$$

$$= \int (18 - 2t)dt$$

$$= 18t - t^2 + c$$

$v_0 = 20$,

$$v(t) = 18t - t^2 + c$$

$$20 = 18.0 - 0^2 + c$$

$$c = \cdots.$$

$$v(t) = 18t - t^2 + \cdots.$$

Kecepatan setelah 6 detik

$$v(6) = 18.6 - 6^2 + 20 = 92\ km/detik^2$$

Rumus jarak

$$s(t) = \int v(t)dt$$

$$= \int (18t - t^2 + 20)dt$$

$$= \dots t^2 - \frac{1}{\dots} t^3 + 20t + c$$

$$s(t) = \dots t^2 - \frac{1}{\dots.} t^3 + 20t + c$$

Jarak awal 5 m

$$s(t) = \dots.t^2 - \frac{1}{3} t^3 + 20t + c$$

$$5 = 9.0^2 - \frac{1}{3}.0^3 + 20.0 + c$$

$$c = \cdots$$

$$s(t) = 9t^2 - \frac{1}{3} t^3 + 20t + \cdots$$

Tentukanlah Jarak saat t = 6 detik

A. 377 B. 57 C. 281 D. 367

SELAMAT BEKERJA