Lembar Kerja Peserta Didik (LKPD)

Mata Pelajaran : Matematika Lanjutan
Kelas/Semester : XII/Ganjil
Materi Pokok : Garis Singgung Lingkaran

Tujuan Pembelajaran:

3.3.3.1 Menemukan rumus persamaan garis singgung lingkaran melalui suatu titik singgung.

4.3.3.1 Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan garis singgung lingkaran melalui suatu titik singgung.

Petunjuk

1. Tulis nama anda dan kelas
2. Isilah bagian kosong pada setiap kegiatan dengan jawaban sebaik mungkin
3. Jika kurang mengerti, segera tanyakan kepada gurumu dan pastikan mengerjakan LKPD ini dengan bekerja sama dengan teman sekelompokmu.

Nama

.....

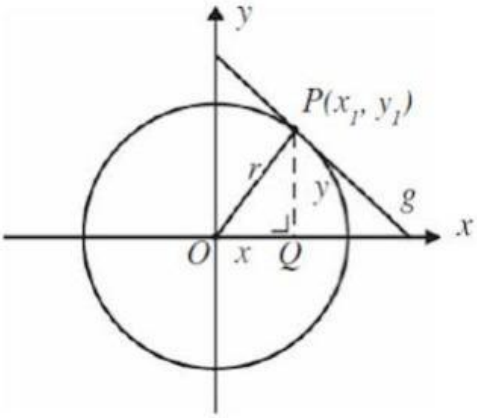
Kelas

.....

LIVEWORKSHEETS

A. Persamaan Garis Singgung Lingkaran yang Melalui Titik Singgung $P(x_1, y_1)$ pada Lingkaran L berpusat di $O(0,0)$ dan berjari-jari r.

Perhatikan gambar berikut.



Garis g merupakan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ di titik $P(x_1, y_1)$.
Hal ini berarti ${x_1}^2 + {y_1}^2 = r^2$.

Berdasarkan gambar di atas dapat dilihat bahwa posisi garis singgung g tegak lurus garis OP.

Gradien garis $OP = m_{OP} = \frac{y_1}{x_1}$, maka gradien garis g adalah $m_g = -\frac{\dots}{\dots}$, karena $m_g . m_{OP} = \cdots$.

Akibatnya, persamaan garis singgung g terhadap lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ di titik $P(x_1, y_1)$ adalah

$$y - y_1 = m_g(x - x_1)$$

$\Leftrightarrow \quad y - y_1 = \dots\dots(x - x_1)$ (substitusikan nilai m_g)

$\Leftrightarrow \quad y_1(y - y_1) = \dots\dots(x - x_1)$ (kalikan masing-masing ruas dengan y_1)

$\Leftrightarrow \quad y_1 y - {y_1}^2 = \dots\dots + \dots\dots$ (sifat distribusi perkalian terhadap pengurangan)

$\Leftrightarrow \quad \dots\dots + y_1 y = \dots\dots + {y_1}^2$

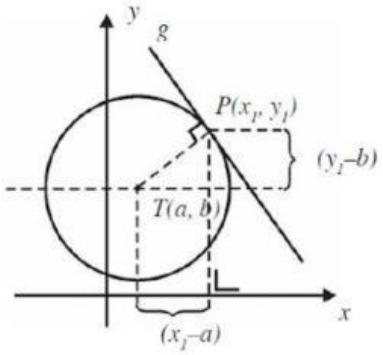
Karena ${x_1}^2 + {y_1}^2 = r^2$ maka diperoleh $\dots\dots + y_1 y = r^2$.

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ di titik $P(x_1, y_1)$ adalah

$$\boxed{\dots\dots + \boldsymbol{y_1 y = r^2}}$$

LIVEWORKSHEETS

B. Persamaan Garis Singgung Lingkaran yang Melalui Titik Singgung $P(x_1, y_1)$ pada Lingkaran L berpusat di $T(a, b)$ dan berjari-jari r.
Perhatikan gambar berikut.



Garis g merupakan garis singgung lingkaran $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ di titik $P(x_1, y_1)$.
Hal ini berarti $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$.

Berdasarkan gambar di atas dapat dilihat bahwa posisi garis singgung g …… garis TP.

Gradien garis $TP = m_{TP} = \frac{y_1 - b}{x_1 - a}$, maka gradien garis g adalah $m_g = -\frac{(\ldots - \ldots)}{(\ldots - \ldots)}$, karena $m_g . m_{TP} =$ ....

Akibatnya, persamaan garis singgung g terhadap lingkaran $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ di titik $P(x_1, y_1)$ adalah

$y - y_1 = m_g(x - x_1)$

$\Leftrightarrow y - y_1 = -\frac{(\ldots - \ldots)}{(\ldots - \ldots)}(x - x_1)$

$\Leftrightarrow$ ……

$\Leftrightarrow$ ……

$\Leftrightarrow$ ……

$\Leftrightarrow$ …… (1)

Karena $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$ maka diperoleh

$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$

$({x_1}^2 - \ldots + \ldots + {y_1}^2 - \ldots + \ldots) = r^2$

${x_1}^2 + {y_1}^2 = r^2 + \ldots - \ldots + \ldots - \ldots$ (2)

Substitusi hasil persamaan (2) ke persamaan (1), sehingga diperoleh:

$\Leftrightarrow$ ……

$\Leftrightarrow$ ……

$\Leftrightarrow$ ……

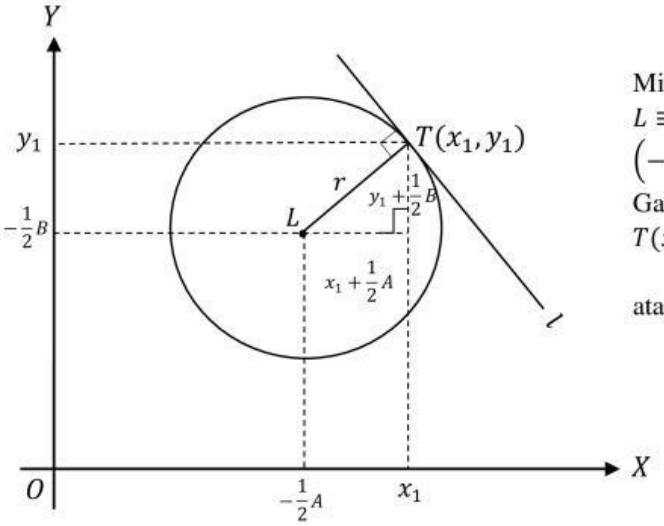
$\Leftrightarrow$ ……

LIVEWORKSHEETS

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran yang berpusat di titik $T(a, b)$ dan berjari-jari r yang melalui titik $P(x_1, y_1)$ pada lingkaran $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ adalah

$$\boxed{(\ldots - \ldots)(\boldsymbol{x_1} - \ldots) + (\ldots - \ldots)(\boldsymbol{y_1} - \ldots) = \boldsymbol{r^2}}$$

C. Persamaan Garis Singgung Lingkaran dengan Bentuk Umum $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$.



Misalkan persamaan lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ dengan pusat $\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right)$.

Garis l menyinggung lingkaran L pada titik $T(x_1, y_1)$, hal ini berarti:

$$x_1{}^2 + y_1{}^2 + Ax_1 + By_1 + C = 0$$

atau

$$C = -(x_1{}^2 + y_1{}^2 + Ax_1 + By_1)$$

Berdasarkan gambar di atas dapat dilihat bahwa posisi garis singgung l …… garis LT.

Gradien garis $LT = m_{LT} = \frac{y_1 + \frac{1}{2}B}{x_1 + \frac{1}{2}A}$, maka gradien garis g adalah $m_l = -\frac{(\ldots - \ldots)}{(\ldots - \ldots)}$, karena $m_l . m_{LT} =$ ....

Akibatnya, persamaan garis singgung l terhadap lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ di titik $T(x_1, y_1)$ adalah

$y - y_1 = m_l(x - x_1)$

$\Leftrightarrow y - y_1 = -\frac{(\ldots - \ldots)}{(\ldots - \ldots)}(x - x_1)$

$\Leftrightarrow$ ……

$\Leftrightarrow$ ……

$\Leftrightarrow$ ……

$\Leftrightarrow$ ……

Karena $C = -(x_1{}^2 + y_1{}^2 + Ax_1 + By_1)$ maka diperoleh ……

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran dengan bentuk umum $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ adalah

$$\boxed{\boldsymbol{x_1 x + y_1 y} + \ldots(\ldots + \ldots) + \ldots(\ldots - \ldots) + \boldsymbol{C = 0}}$$

LIVEWORKSHEETS

Kegiatan 2

MENYELESAIKAN MASALAH YANG BERKAITAN DENGAN PERSAMAAN GARIS SINGGUNG LINGKARAN

Agar lebih memahami tentang persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik singgung $P(x_1, y_1)$ pada lingkaran L, kerjakan soal-soal berikut bersama teman sekelompokmu !

1. Tentukan persamaan garis singgung pada lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 5$ di titik singgung $A(1, -2)$.

Penyelesaian:

Diketahui $x_1 = 1,\ y_1 = -2$ dan $r^2 = 5$

Substitusikan nilai x_1, y_1 dan r^2 ke persamaan garis singgung menjadi:

$$x_1 x + y_1 y = r^2$$

$$\Leftrightarrow \ \ldots x + \ldots y = \ldots$$

Jadi, persamaan garis singgung pada lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 = 5$ di titik singgung $A(1, -2)$ adalah …

2. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 58$ di titik singgung $B(0,9)$!

Penyelesaian:

Diketahui $x_1 = \ \ldots\ ,\ y_1 = \ \ldots$ dan $r^2 = \ \ldots$

Substitusikan nilai x_1, y_1 dan r^2 ke persamaan garis singgung menjadi:

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$$

$$\Leftrightarrow \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Leftrightarrow \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Leftrightarrow \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Leftrightarrow \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Jadi, persamaan garis singgung pada lingkaran $L \equiv (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 58$ di titik singgung $B(0,9)$adalah …

LIVEWORKSHEETS

3. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + 4x + 8y - 21 = 0$ di titik singgung $C(2,1)$!

Penyelesaian:

Diketahui $x_1 = \ldots$, $y_1 = \ldots$

Substitusikan nilai x_1 dan y_1 ke persamaan garis singgung menjadi:

$$x_1x + y_1y + \frac{A}{2}(x + x_1) + \frac{B}{2}(y + y_1) + C = 0$$

$\Leftrightarrow$ ……

$\Leftrightarrow$ ……

$\Leftrightarrow$ ……

$\Leftrightarrow$ ……

Jadi, persamaan garis singgung pada lingkaran $L \equiv x^2 + y^2 + 4x + 8y - 21 = 0$ di titik singgung $C(2,1)$ adalah …

4. Terjadi perang antara 2 pasukan negara A dan negara B. Pasukan negara B membangun pangkalan pada kota dengan koordinat (0,0). Pangkalan tersebut dilengkapi radar yang mampu mendeteksi musuh pada radius 25 m. Tentukan persamaan lintasan pesawat yang harus ditempuh pasukan A agar bisa mengebom daerah pasukan B di koordinat (4,3) dengan syarat pesawat tidak boleh terdeteksi sebelumnya dan pesawat tidak bisa mundur serta buatlah sketsa dari permasalahan di atas. (Jalur pesawat diasumsikan lurus)

Penyelesaian:

C. Persamaan Garis Singgung Lingkaran dengan Gradien m

Sebuah garis yang mempunyai gradien m dan melalui titik (0,c) dinyatakan dengan rumus $y = mx + c$. Jika garis tersebut menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$, maka nilai c dapat diperoleh dengan langkah-langkah sebagai berikut.

Subsitusikan $y = mx + c$ ke dalam persamaan lingkaran.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 + (\ldots. + \cdots.)^2 = r^2$$

LIVEWORKSHEETS

$$\ldots.^{\cdots} + \ldots^{\cdots}\ \ldots.^{\cdots} + 2\ \ldots.\ldots.x + \ \ldots^{\cdots} = r^2$$
$$(\ldots. + \cdots.^{\cdots})x^2 + 2\ \ldots.\ldots.\ldots. + \ldots.^{\cdots} - \ldots.^{\cdots} = 0$$

Persamaan kuadrat dalam x akan mempunyai satu akar real jika diskriminannya sama dengan nol.

$$D = 0$$
$$b^2 - 4a.c = 0$$
$$(\ldots m \ldots)^2 - 4(\ldots. + \cdots.)(\ldots.. - \cdots.) = 0$$
$$4\ \ldots^{\cdots}\ \ldots^{-} - 4(\ldots. + \cdots.. - \cdots. - \cdots..) = 0$$
$$4m^2c^2 - \cdots. - \cdots \ldots + \cdots \ldots. + \cdots \ldots = 0$$
$$-4\ \ldots. + 4 \ldots + 4 \ldots \ldots = 0$$
$$4c^2 = \cdots \ldots + \cdots \ldots.$$
$$c^2 = \ldots.+\ldots.$$
$$c = \pm\sqrt{\ldots. + \cdots.}$$

Jadi persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ yang bergradien m adalah :

$$y = mx \pm \cdots.\sqrt{\ldots. + \cdots..}$$

Soal :

1. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran : $x^2 + y^2 = 16$ yang bergradien 3

Penyelesaian:

LIVEWORKSHEETS