

BILANGAN BERPANGKAT, BENTUK AKAR, DAN LOGARITMA

A. Bilangan Berpangkat (Eksponen)

Jika a bilangan real dan n bilangan bulat positif, maka a^n (dibaca “ a pangkat n ”) didefinisikan sebagai berikut.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \cdot a}_{\text{sebanyak } n}$$

a^n dibaca a pangkat n , dengan a merupakan **bilangan pokok** atau **dasar** dan n disebut **pangkat** atau **eksponen**.

1. Perkalian eksponen

Untuk a bilangan real, m dan n bilangan bulat positif, perkalian bilangan berpangkat dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, a \neq 0$$

Contoh:

$$\text{a. } \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{2+3} = \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243} \quad \text{b. } 10 \cdot 10^6 = 10^{1+6} = 10^7$$

2. Pembagian eksponen

Untuk a bilangan real, m dan n bilangan bulat positif serta $m > n$, pembagian bilangan berpangkat dapat dinyatakan sebagai berikut,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0$$

Contoh:

$$\text{a. } \left(\frac{1}{5}\right)^4 : \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^{4-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25} \quad \text{b. } 5^3 : 5^{-1} = 5^{3-(-1)} = 5^4$$

3. Perpangkatan eksponen

Untuk a bilangan real, m dan n bilangan bulat positif, perpangkatan bilangan berpangkat dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}, a \neq 0$$

Contoh:

$$\text{a. } \left(5^{\frac{1}{4}}\right)^4 = 5^{\frac{1}{4} \cdot 4} = 5 \quad \text{b. } 81^{\frac{3}{4}} = \left(3^4\right)^{\frac{3}{4}} = 3^{4 \cdot \frac{3}{4}} = 3^3 = 27$$

4. Perpangkatan dari perkalian dua atau lebih bilangan

Untuk a dan b bilangan real, m bilangan bulat positif, perpangkatan dari perkalian dua atau lebih bilangan dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m, a \neq 0, b \neq 0$$

Contoh:

$$\text{a. } (3 \cdot 5)^7 = 3^7 \cdot 5^7 \quad \text{b. } (3^2 \cdot 5 \cdot 2)^4 = 3^{2 \cdot 4} \cdot 5^4 \cdot 2^4 = 3^8 \cdot 5^4 \cdot 2^4$$

5. Perpangkatan bilangan pecahan

Untuk a dan b bilangan real, m bilangan bulat positif, perpangkatan bilangan pecahan dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, a \neq 0, b \neq 0$$

Contoh:

$$\text{a. } 100^4 : 50^4 = (100 : 50)^4 = 2^4 = 16 \quad \text{b. } \left(\frac{ab^2}{c^5 d^{12}}\right)^4 = \frac{a^4 b^{2 \cdot 4}}{c^{5 \cdot 4} d^{12 \cdot 4}} = \frac{a^4 b^8}{c^{20} d^{48}}$$

6. Bilangan berpangkat nol

Untuk a bilangan real, bilangan berpangkat nol dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$a^0 = 1, a \neq 0$$

7. Bilangan berpangkat negatif

Untuk a bilangan real dan m bilangan bulat positif, pangkat bilangan negatif dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}, a \neq 0$$

Contoh:

a. Selesaikan bentuk bilangan berpangkat berikut.

$$1) 5^{-1} \qquad 2) \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} \qquad 3) 10 : 10^6$$

Penyelesaian:

$$1) 5^{-1} = \frac{1}{5} \qquad 3) 10 : 10^6 = 10^{1-6} = 10^{-5} = \frac{1}{10^5} = \frac{1}{100.000} = 0,00001$$
$$2) \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = (4^{-1})^{-3} = 4^{-1 \cdot (-3)} = 4^3 = 64$$

b. Sederhanakan dan nyatakan dalam bentuk pangkat positif dari $\frac{2a^3b^{-5}c^2}{6a^9b^2c^{-1}}$!

Penyelesaian:

$$\frac{2a^3b^{-5}c^2}{6a^9b^2c^{-1}} = \frac{2}{6} \cdot a^{3-9}b^{-5-2}c^{2-(-1)} = \frac{1}{3} \cdot a^{-6}b^{-7}c^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{a^6} \cdot \frac{1}{b^7} \cdot c^3 = \frac{c^3}{3a^6b^7}$$

Notasi Ilmiah/Bentuk Baku

Untuk bilangan yang sangat kecil maupun sangat besar nilainya, bilangan tersebut dapat ditulis secara ringkas dengan menggunakan **notasi ilmiah** atau biasa disebut **bentuk baku**; yang dinyatakan dalam bentuk:

$$a \cdot 10^n; 1 \leq a < 10; n \in \mathbb{Z}$$

Contoh:

Nyatakan bilangan-bilangan berikut ke dalam bentuk baku!

$$\begin{array}{ll} \text{a. } 0,0000407 & \text{c. } 160.854.000.000 \\ \text{b. } 0,0000000030486 & \text{d. } 5.704.300.000.000 \end{array}$$

Penyelesaian:

$$\begin{array}{ll} \text{a. } 0,0000407 = 4,07 \cdot 10^{-5} & \text{c. } 160.854.000.000 = 1,60854 \cdot 10^{11} \\ \text{b. } 0,0000000030486 = 3,0486 \cdot 10^{-9} & \text{d. } 5.704.300.000.000 = 5,7043 \cdot 10^{12} \end{array}$$

Latihan Soal

1. Sederhanakanlah!

$$\begin{array}{lll} \text{a. } 7^3 \cdot 7^5 \cdot 7^{-2} & \text{c. } 10 \cdot 10^6 \cdot 10^{-4} \cdot 10^7 & \text{e. } 5^3 \cdot 5^{-1} \cdot 5^5 \cdot 5^2 \\ \text{b. } p^7 \cdot p^{-1} & \text{d. } \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-4} & \end{array}$$

2. Sederhanakan!

$$\begin{array}{lll} \text{a. } 2^{10} : 2^8 & \text{c. } 10 : 100^{-2} & \text{e. } 6^5 \cdot (6^2 : 6^3) \\ \text{b. } 3^8 : 3^{-2} & \text{d. } 3^3 \cdot 3^{-1} : 3^5 \cdot 3^2 & \end{array}$$

3. Sederhanakan!

$$\begin{array}{lll} \text{a. } (2^4)^5 \cdot 2^3 & \text{c. } (a^4 \cdot b^{-3})^7 & \text{e. } (4^2 \cdot 2^{-4}) \cdot (5^2 \cdot 3^{-3})^2 \\ \text{b. } 5^2 \cdot \left(\frac{1}{125}\right)^{-1} : 25^2 & \text{d. } \left(\frac{1}{10.000}\right)^{\frac{3}{4}} & \end{array}$$

4. Sederhanakan dan selesaikan tanpa menggunakan alat hitung!

a. $216^{\frac{2}{3}}$

c. $5^{\frac{2}{3}} \cdot 25^{\frac{2}{3}} \cdot 8^{\frac{2}{3}}$

b. $81^{\frac{3}{4}}$

d. $500^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot (125 \times 3)^0$

5. Sederhanakan dan hitunglah $\frac{2^4 \cdot 9^{-2} \cdot 5^{-2}}{8 \cdot 3^{-5} \cdot 125^{-1}}$!

6. Sederhanakanlah!

a. $\left(\frac{5}{x}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{25}{3x}\right)^7 : \left(\frac{5}{2x}\right)^{-4}$

b. $\frac{(2n)^2 : (2n)^{-5} \cdot (2n)^{-4}}{(2n)^3 : (2n)^7}$

7. Jika $x = 27$, $y = 36$, dan $z = 5$, tentukan nilai dari $\frac{x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{3}{2}}}{z^2}$

8. Sederhanakanlah bentuk $\frac{(3m)^5 \cdot ((3m)^{-1})^2 : (3m)^3}{(3m)^4 : (3m)^3}$

9. Hitunglah nilai dari $\frac{a^3 b^{-2} c^6}{abc}$ untuk $a = 5$, $b = 2$, dan $c = 1$.

10. Tentukan bentuk sederhana dari $\left(\frac{p^{\frac{1}{2}} q^{\frac{3}{4}} r}{4pq^{\frac{1}{4}}}\right)^2$.

11. Jika $k = 2$, $l = 3$, dan $m = 4$, tentukan hasil dari $\left(\frac{3k^2 l^3 m}{k^2 l^{-5} m^4}\right)^{-2}$.

12. Tulislah bilangan-bilangan berikut ke dalam bentuk baku/notasi ilmiah.

a. 160.000

c. 3.400.000.000

e. 0,0001234

b. 0,4000560

d. 1.250.000.000

13. Sebuah kolam renang berbentuk persegi panjang memiliki panjang $12 \cdot 10^2$ cm dan lebar $8 \cdot 10^2$ cm. Tentukan luas kolam renang tersebut.

14. Sebuah bakteri melakukan pembelahan diri menjadi 2 bagian setelah 1 menit. Tentukan jumlah bakteri tersebut setelah 1 hari secara terus-menerus melakukan pembelahan.

15. Sebuah benda mempunyai gaya (F) sebesar $1,5 \cdot 10^3$ N. Luas daerah (A) di mana benda diletakkan adalah $7,5 \cdot 10$ m². Tentukan tekanan (P) yang diberikan benda. **Diketahui:**

$$P = \frac{F}{A}.$$

16. Hasil dari $\left(\frac{81x^{\frac{3}{4}} yz^{\frac{3}{2}}}{27x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{4}} z^{\frac{1}{2}}}\right)^4$ adalah

B. Bentuk Akar

Dalam bilangan bentuk akar (radikal), ada tiga bagian yang perlu diketahui, yaitu lambang akar, radikan, dan indeks. Secara umum bentuk akar ditulis dalam bentuk $\sqrt[n]{a}$ (dibaca “akar pangkat n dari a ”) dengan a adalah **radikan** dan n adalah **indeks** dimana **a** adalah bilangan real positif dan n bilangan asli, $n \geq 2$. Jika $n = 2$, maka dalam penulisan bentuk akar tidak dicantumkan. Contoh: $\sqrt{5}$ (dibaca “akar 5” atau “akar pangkat 2 dari 5”)

Bentuk akar terbagi atas dua jenis, yaitu:

- Akar senama

Suatu bentuk akar dikatakan akar senama jika indeksnya sama.

Contoh:

- a. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ mempunyai indeks 2
- b. $\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{10}, \sqrt[3]{11}$ mempunyai indeks 3

- Akar sejenis

Suatu bentuk akar dikatakan akar sejenis jika indeks dan radikannya sama

Contoh:

$\sqrt[3]{2}, 2\sqrt[3]{2}, 5\sqrt[3]{2}$ mempunyai indeks 3, radikannya 2

1. Definisi Bentuk Akar

Bentuk akar adalah akar dari suatu bilangan yang nilainya memuat tidak terhingga banyaknya angka di belakang koma dan tidak berulang.

Contoh:

- a. $\sqrt{2} = 1,414213 \dots$
- b. $\sqrt{8} = 2,828427 \dots$
- b. $\sqrt{3} = 1,732050 \dots$
- c. $\sqrt{15} = 3,872983 \dots$

2. Menyederhanakan Bentuk Akar

Bentuk akar dapat disederhanakan dengan cara mengubah bilangan di dalam akar tersebut menjadi dua bilangan dengan bilangan yang satu dapat diakarkan, sedangkan bilangan yang lain tidak dapat diakarkan.

Contoh:

- a. $\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$
- c. $\sqrt{125} = \sqrt{25 \cdot 5} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$
- b. $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$
- d. $\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{27 \cdot 3} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{3}$

3. Mengoperasikan Bentuk Akar

a. Penjumlahan dan pengurangan bentuk akar

Dua atau lebih bilangan bentuk akar dapat dijumlahkan atau dikurangkan jika bentuk akarnya sejenis.

Untuk a, b bilangan real, dan c bilangan rasional nonnegatif, berlaku hubungan berikut.

$$a\sqrt{c} + b\sqrt{c} = (a + b)\sqrt{c}$$

$$a\sqrt{c} - b\sqrt{c} = (a - b)\sqrt{c}$$

Contoh:

- 1) $4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = (4 + 2)\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$
- 2) $3\sqrt{6} + \sqrt{6} - 5\sqrt{6} = (3 + 1 - 5)\sqrt{6} = -\sqrt{6}$
- 3) $\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{6}$ Tidak dapat disederhanakan karena bentuk akarnya berlainan
- 4) $4\sqrt{5} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{5} + 7\sqrt{3} = (4 - 2)\sqrt{5} + (2 + 7)\sqrt{3} = 2\sqrt{5} + 9\sqrt{3}$
- 5) $\sqrt{20} - \sqrt{500} + \sqrt{320} = 2\sqrt{5} - 10\sqrt{5} + 8\sqrt{5} = (2 - 10 + 8)\sqrt{5}$
- 6) $\sqrt{28} - \sqrt{125} + \sqrt{63} - \sqrt{80} = 2\sqrt{7} - 5\sqrt{5} + 3\sqrt{7} - 4\sqrt{5} = -9\sqrt{5} + 5\sqrt{7}$

b. Perkalian bilangan real dengan bentuk akar

Untuk a, b bilangan real, dan c bilangan rasional nonnegatif, berlaku hubungan berikut.

$$a \cdot b\sqrt{c} = ab\sqrt{c}$$

Contoh:

- 1) $6 \cdot 3\sqrt{5} = 18\sqrt{5}$
- 2) $2 \cdot \sqrt{242} = 2 \cdot \sqrt{121 \cdot 2} = 2 \cdot 11\sqrt{2} = 22\sqrt{2}$
- 3) $8 \cdot 0,5\sqrt{20} = 4\sqrt{20} = 4 \cdot 2\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$
- 4) $3 \cdot (4\sqrt{2} + \sqrt{162}) = 12\sqrt{2} + 3\sqrt{162} = 12\sqrt{2} + 3 \cdot 9\sqrt{2} = 39\sqrt{2}$

c. Perkalian bentuk akar dengan bentuk akar

Untuk c, e bilangan real dan a, b, d, f bilangan rasional nonnegatif, berlaku sifat berikut.

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \text{ atau } c\sqrt{d} \cdot e\sqrt{f} = c \cdot e\sqrt{d \cdot f}$$

Contoh:

1) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{7 \cdot 6} = \sqrt{42}$

2) $2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{12} = 6\sqrt{24} = 6 \cdot 2\sqrt{6} = 12\sqrt{6}$

3) $2\sqrt{6}(\sqrt{2} + 5\sqrt{3}) = (2\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}) + (2\sqrt{6} \cdot 5\sqrt{3}) = 2\sqrt{12} + 10\sqrt{18}$
 $= 2 \cdot 2\sqrt{3} + 10 \cdot 3\sqrt{2} = 4\sqrt{3} + 30\sqrt{2}$

4) $(\sqrt{8} + \sqrt{5})(\sqrt{8} - \sqrt{5}) = 8 - \sqrt{40} + \sqrt{40} - 5 = 8 - 5 = 3$

d. Pembagian bentuk akar (Merasionalkan penyebut pecahan bentuk akar)

Penyederhanaan pembagian bentuk akar sering disebut dengan **merasionalkan penyebut bentuk pecahan**. Untuk merasionalkan penyebut bentuk pecahan, bilangan tersebut **dikalikan dengan sekawan dari penyebutnya**. Untuk a, b bilangan rasional nonnegatif, maka berlaku:

1) $\sqrt{a}$ sekawan dengan $\sqrt{a}$

2) $(a + \sqrt{b})$ sekawan dengan $(a - \sqrt{b})$

3) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ sekawan dengan $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$

Perhatikan rasionalisasi bentuk-bentuk berikut.

1) Bentuk $\frac{a}{\sqrt{b}}$

Untuk a bilangan real dan b bilangan rasional nonnegatif, $b \neq 0$ berlaku hubungan berikut.

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

Contoh:

a) $\frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$

b) $\frac{10}{2\sqrt{5}} = \frac{10}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{2 \cdot 5} = \sqrt{5}$

c) $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{50}}{10} = \frac{2 \cdot 5\sqrt{2}}{10} = \sqrt{2}$

2) Bentuk $\frac{c}{a + \sqrt{b}}$

Untuk a, c bilangan real dan b bilangan rasional nonnegatif, berlaku hubungan berikut.

$$\frac{c}{a + \sqrt{b}} = \frac{c}{a + \sqrt{b}} \cdot \frac{a - \sqrt{b}}{a - \sqrt{b}} = \frac{c(a - \sqrt{b})}{a^2 - b}$$

Contoh:

a) $\frac{2}{1 + \sqrt{3}} = \frac{2}{1 + \sqrt{3}} \cdot \frac{1 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{2(1 - \sqrt{3})}{1 - 3} = -(1 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1$

b) $\frac{8}{5 - \sqrt{17}} = \frac{8}{5 - \sqrt{17}} \cdot \frac{5 + \sqrt{17}}{5 + \sqrt{17}} = \frac{8(5 + \sqrt{17})}{5^2 - 17} = \frac{8(5 + \sqrt{17})}{8} = 5 + \sqrt{17}$

3) Bentuk $\frac{c}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

Untuk c bilangan real dan a, b bilangan rasional nonnegatif, berlaku hubungan berikut.

$$\frac{c}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{c}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}$$

Contoh:

$$\text{a) } \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{3 - 2} = \frac{3 - 2\sqrt{6} + 2}{1} = 5 - 2\sqrt{6}$$

$$\text{b) } \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{5 - 3} = \frac{2\sqrt{10} + 2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{10} + \sqrt{6}$$

e. Menyederhanakan bentuk akar

Bentuk $\sqrt{(a + b) \pm 2\sqrt{ab}}$ dapat diubah menjadi bentuk $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ dengan syarat $a, b \in \mathbf{R}$ dan $a > b$.

Contoh:

Sederhanakan bentuk berikut.

$$1) \sqrt{12 - 2\sqrt{20}}$$

$$3) \sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$$

$$2) \sqrt{21 + 2\sqrt{80}}$$

$$4) \frac{5}{\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}}$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} 1) \sqrt{12 - 2\sqrt{20}} &= \sqrt{(10 + 2) - 2\sqrt{10} \cdot 2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{10} - \sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{10} - \sqrt{2} \end{aligned}$$

(cari faktor 20 yang jika dijumlahkan bernilai 12)

$$\begin{aligned} 2) \sqrt{21 + 2\sqrt{80}} &= \sqrt{(16 + 5) + 2\sqrt{16} \cdot 5} \\ &= \sqrt{(\sqrt{16} + \sqrt{5})^2} \\ &= \sqrt{16} + \sqrt{5} \\ &= 4 + \sqrt{5} \end{aligned}$$

(cari faktor 80 yang jika dijumlahkan bernilai 21)

$$\begin{aligned} 3) \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} &= \sqrt{11 + 2 \cdot 3\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{11 + 2\sqrt{18}} \\ &= \sqrt{(9 + 2) + 2\sqrt{9} \cdot 2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{9} + \sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{9} + \sqrt{2} \\ &= 3 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

(cari faktor 18 yang jika dijumlahkan bernilai 11)

$$\begin{aligned} 4) \frac{5}{\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}} &= \frac{5}{\sqrt{(3 + 2) - 2\sqrt{3} \cdot 2}} \\ &= \frac{5}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \end{aligned}$$

(penyebut diubah menjadi $\sqrt{3} - \sqrt{2}$)

$$= \frac{5}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{5(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{3 - 2} = 5(\sqrt{3} + \sqrt{2})$$

4. Persamaan Bentuk Pangkat (*Pengayaan*)

Persamaan bentuk pangkat dapat diselesaikan dengan cara:

- Menyatakan ruas kiri dan ruas kanan dalam bentuk pangkat/eksponen sehingga bilangan pokok kedua ruas tersebut sama.
- Jika bilangan pokok kedua ruas sudah sama, samakan kedua eksponennya.

Secara umum dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$a^x = a^y \Rightarrow x = y, a \neq 0$$

Contoh:

Carilah nilai x yang memenuhi persamaan berikut!

a. $4^{3x} = \sqrt{4.096}$

b. $9^{2x-1} = 27^{4-3x}$

Penyelesaian:

a. $4^{3x} = \sqrt{4.096}$

$$\Leftrightarrow 4^{3x} = 64$$

$$\Leftrightarrow (2^2)^{3x} = 2^6$$

$$\Leftrightarrow 2^{6x} = 2^6$$

$$\Leftrightarrow 6x = 6$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

b. $9^{2x-1} = 27^{4-3x}$

$$\Leftrightarrow (3^2)^{2x-1} = (3^3)^{4-3x}$$

$$\Leftrightarrow 3^{4x-2} = 3^{12-9x}$$

$$\Leftrightarrow 4x - 2 = 12 - 9x$$

$$\Leftrightarrow 4x + 9x = 12 + 2$$

$$\Leftrightarrow 13x = 14$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{14}{13}$$

Latihan Soal

1. Sederhanakan bentuk akar berikut.

a. $12\sqrt{6} - 7\sqrt{6} + 3\sqrt{6}$

b. $6\sqrt{5} + \sqrt{5} - 20\sqrt{5}$

c. $\sqrt{700} + \sqrt{180} + \sqrt{80} - \sqrt{847}$

d. $2\sqrt{150} - 3\sqrt{54} - \sqrt{294} + 3\sqrt{486}$

e. $\sqrt{12} + \sqrt{27} + \sqrt{75}$

2. Sederhanakan bentuk akar berikut.

a. $\sqrt{50} \cdot \sqrt{20}$

b. $2\sqrt{3}(2\sqrt{40} + \sqrt{12})$

c. $(\sqrt{2} + \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{5})$

d. $(2\sqrt{5} - 3\sqrt{3})(2\sqrt{5} + 3\sqrt{3})$

e. $(4\sqrt{7})^2 - (2\sqrt{3})^2$

3. Rasionalkan bentuk-bentuk berikut.

a. $\frac{2}{\sqrt{3}}$

d. $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

g. $\frac{4}{2-\sqrt{3}}$

j. $\frac{\sqrt{8}-\sqrt{5}}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$

b. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

e. $\frac{15}{2\sqrt{5}}$

h. $\frac{10}{\sqrt{13}+\sqrt{8}}$

c. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

f. $\frac{100}{4\sqrt{10}}$

i. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

4. Sederhanakan bentuk berikut.

a. $\frac{(\sqrt{12}-\sqrt{27})\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}}$

b. $\frac{(\sqrt{96} \cdot 2\sqrt{2}) - 2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}$

5. Sederhanakan bentuk-bentuk akar berikut.

a. $\sqrt{15+2\sqrt{54}}$

c. $\sqrt{20-10\sqrt{3}}$

e. $\frac{12}{\sqrt{8+2\sqrt{12}}}$

b. $\sqrt{9-2\sqrt{8}}$

d. $\sqrt{11+4\sqrt{7}}$

f. $\frac{\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}$

6. Tentukan nilai x dari persamaan berikut.

a. $\sqrt{3^{x+3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{6-x}$

c. $128^{8x-2} = 2^{10+x}$

b. $\sqrt[4]{8^{x-5}} = 4^{4+2x}$

d. $64^{5x-1} = 16^{3x+3}$

7. Perkembangan suatu jenis virus dinyatakan dalam model $f(n) = 2^{n+2}$, dengan $f(n)$ adalah jumlah virus setelah n jam. Jika jumlah virus telah mencapai 256, tentukan nilai n .
8. Kecepatan suatu mobil dicatat dengan model matematika $v(t) = t^2 - 1$ dengan t adalah waktu (s). Tentukan waktu t yang digunakan pada saat kecepatan mobil setelah mencapai 99 m/s
9. Jumlah produksi beras pada tahun 2017 di Indonesia dinyatakan dalam $P(t) = t^3 + 17$, dengan t adalah waktu (bulan) dan $P(t)$ dinyatakan dengan satuan ton. Tentukan waktu yang telah berjalan jika jumlah produksi beras telah mencapai 1.017 ton.
10. Produksi suatu mesin dinyatakan dalam $P(t) = 100t^4$ dengan waktu t dalam tahun. Tentukan waktu yang dibutuhkan perusahaan untuk memproduksi 8.100 mesin.
11. Hasil panen palawija di suatu desa dinyatakan dalam $g(t) = 100\sqrt{t} + 20$, dengan t adalah waktu (bulan) dan $g(t)$ dinyatakan dalam satuan ton. Tentukan waktu yang dibutuhkan agar hasil panen mencapai 1.220 ton.
12. Bentuk sederhana dari $4\sqrt{72} + 5\sqrt{32} - 2\sqrt{162}$ adalah
13. Nilai x yang memenuhi persamaan $9^{\frac{1+2x}{2}} = (\sqrt{3})^{1-2x}$ adalah

C. Logaritma

1. Pengertian Logaritma

Logaritma merupakan invers/kebalikan dari eksponen. Secara umum ditulis

$$a^C = b \Leftrightarrow {}^a\log b = C$$

Dengan $a > 0, a \neq 0, b > 0, a$ disebut **bilangan pokok logaritma** atau **basis**, b disebut **numerus**, yaitu bilangan yang dilogaritmakan.

Contoh:

a. $2^3 = 8 \Leftrightarrow {}^2\log 8 = 3$

b. $3^{-4} = \frac{1}{81} \Leftrightarrow {}^3\log \frac{1}{81} = -4$

c. $10^4 = 10.000 \Leftrightarrow {}^{10}\log 10.000 = 4$ atau $\log 10.000 = 4$

2. Sifat-sifat Logaritma

Sifat-sifat logaritma berikut berlaku dengan syarat $p > 0$ dan $p \neq 1, a > 0, b > 0$, dan $m, n \in \mathbb{R}$.

a. ${}^p\log(a \cdot b) = {}^p\log a + {}^p\log b$

f. ${}^a\log b^m = \frac{m}{n} \cdot {}^a\log b$

b. ${}^p\log \frac{a}{b} = {}^p\log a - {}^p\log b$

g. $a^{a\log b} = b$

c. ${}^p\log a^n = n \cdot {}^p\log a$

h. ${}^p\log 1 = 0$

d. ${}^a\log b = \frac{{}^p\log b}{{}^p\log a}$

i. ${}^a\log a = 1$

e. $\frac{1}{{}^a\log b} = {}^b\log a$

j. ${}^p\log a \cdot {}^a\log b = {}^p\log b$

Contoh:

a. Tentukan nilai berikut.

1) ${}^2\log 24 + {}^2\log 3 - {}^2\log 9$

3) $2 \cdot {}^2\log 8 + {}^2\log \sqrt{2} - 3 \cdot {}^2\log \frac{1}{4}$

2) $\log 5 + \log 4 - \log 2 + \log 10$

Penyelesaian:

1) ${}^2\log 24 + {}^2\log 3 - {}^2\log 9 = {}^2\log \left(\frac{24 \cdot 3}{9} \right) = {}^2\log 8 = {}^2\log 2^3 = 3$ (sifat a, b, dan c)

2) $\log 5 + \log 4 - \log 2 + \log 10 = \log \left(\frac{5 \cdot 4 \cdot 10}{2} \right) = \log 100 = \log 10^2 = 2$ (sifat a dan b)

3) $2 \cdot {}^2\log 8 + {}^2\log \sqrt{2} - 3 \cdot {}^2\log \frac{1}{4} = {}^2\log 8^2 + {}^2\log 2^{\frac{1}{2}} - {}^2\log \left(\frac{1}{4} \right)^3$
 $= {}^2\log (2^3)^2 + {}^2\log 2^{\frac{1}{2}} - {}^2\log (2^{-2})^3$ (sifat c)
 $= {}^2\log \left(\frac{2^6 \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{2^{-6}} \right) = {}^2\log 2^{6 + \frac{1}{2} - (-6)} = {}^2\log 2^{12\frac{1}{2}}$ (sifat a & b)
 $= 12\frac{1}{2} \cdot {}^2\log 2 = 12\frac{1}{2}$ (sifat c & i)

b. Dengan menggunakan sifat logaritma, tentukan nilai berikut.

1) ${}^3\log 27$

2) $\frac{1}{25}\log 125$

3) $\sqrt{7}\log \frac{1}{343}$

Penyelesaian:

1) ${}^3\log 27 = {}^3\log 3^3 = 3 \cdot {}^3\log 3 = 3$ (sifat c dan i)

2) $\frac{1}{25}\log 125 = {}^{5^{-2}}\log 5^3 = \frac{3}{-2} \cdot {}^5\log 5 = -\frac{3}{2}$ (sifat f dan i)

3) $\sqrt{7}\log \frac{1}{343} = {}^{7^{\frac{1}{2}}}\log 7^{-3} = \frac{-3}{\frac{1}{2}} \cdot {}^7\log 7 = -6$ (sifat f dan i)

c. Jika diketahui $\log 2 = 0,3010$ dan $\log 3 = 0,4771$; tentukan nilai berikut.

1) $\log 12$

2) $\log 0,125$

Penyelesaian:

1) $\log 12 = \log (2 \cdot 2 \cdot 3) = \log 2 + \log 2 + \log 3 = 0,3010 + 0,3010 + 0,4771 = 1,0791$

2) $\log 0,125 = \log \frac{1}{8} = \log 2^{-3} = -3 \cdot \log 2 = -3 \cdot 0,3010 = -0,9030$

d. Tentukan nilai dari ${}^5\log 7 \cdot {}^7\log 625$

Penyelesaian:

${}^5\log 7 \cdot {}^7\log 625 = {}^5\log 625 = {}^5\log 5^4 = 4$

e. Jika ${}^5\log 4 = a$ dan ${}^4\log 3 = b$, tentukan nilai dari ${}^3\log 20$.

Penyelesaian:

${}^5\log 4 = \frac{\log 4}{\log 5} = a \Leftrightarrow \log 5 = \frac{\log 4}{a}$

${}^4\log 3 = \frac{\log 3}{\log 4} = b \Leftrightarrow \log 3 = b \cdot \log 4$

${}^3\log 20 = \frac{\log 20}{\log 3} = \frac{\log (4 \cdot 5)}{\log 3} = \frac{\log 4 + \log 5}{\log 3} = \frac{\log 4 + \frac{\log 4}{a}}{b \log 4} = \frac{1 + \frac{1}{a}}{b} = \frac{a+1}{ab}$

Latihan Soal

- Tentukan nilainya tanpa menggunakan alat hitung.
 - ${}^2\log 4$
 - ${}^4\log 64$
 - ${}^{36}\log 216$
 - $\log 0,00001$
 - ${}^3\log \frac{1}{9} \times {}^4\log 256$
- Sederhanakanlah.
 - ${}^2\log 50 + {}^2\log 8 - {}^2\log 100$
 - ${}^2\log \sqrt{8} + {}^2\log \sqrt{2} - {}^2\log 16$
 - ${}^2\log 16 + {}^3\log 27 + {}^5\log \frac{1}{625}$
 - ${}^4\log 9 \cdot {}^3\log 125 \cdot {}^{25}\log 16$
 - $\frac{1}{2}\log 9 \cdot \frac{1}{3}\log 7 \cdot {}^{49}\log 32$
 - ${}^3\log 27 + {}^5\log \frac{1}{25} - \log 0,0001$
- Jika diketahui $\log 3 = 0,4771$ dan $\log 5 = 0,6990$, tentukan nilai berikut.
 - $\log 45$
 - $\log 25$
 - $\log 0,36$
 - $\log 135$
 - $\log \frac{5}{3}$
 - $\log \sqrt{135}$
- Jika diketahui $\log 5 = x$ dan $\log 7 = y$, tentukan nilai logaritma berikut dalam x dan y .
 - $\log 175$
 - $\log 3,5$
- Dengan menggunakan kalkulator, tentukan nilai dari soal berikut.
 - ${}^8\log 60$
 - $\frac{1}{5}\log 625$
 - ${}^{125}\log \frac{1}{64}$
 - ${}^{125}\log 75$
 - ${}^{625}\log \frac{1}{5}$
 - $\sqrt{2}\log \frac{1}{64}$
- Sederhanakan bentuk logaritma berikut.
 - $3 \cdot {}^3\log 2 + 2 \cdot {}^3\log 9 - {}^3\log 48$
 - ${}^9\log 4 + {}^9\log 1 - {}^9\log 35$
 - $2 \cdot {}^a\log b \cdot {}^b\log c^3 \cdot {}^c\log a$
- Diketahui ${}^2\log 3 = a$. Tentukan nilai berikut.
 - ${}^2\log 9$
 - ${}^{27}\log 4$
 - $\frac{1}{8}\log 9$
 - $\sqrt{3}\log \frac{1}{16}$
- Diketahui ${}^2\log 3 = a$ dan ${}^3\log 7 = b$. Hitunglah nilai berikut dalam bentuk a dan b .
 - ${}^{21}\log 48$
 - ${}^{54}\log 64$
 - ${}^{42}\log 56$
- Penentuan pH keasaman suatu larutan biasanya menggunakan fungsi logaritma. Misalkan diketahui konsentrasi larutan x adalah $2 \cdot 10^{-2}$ M. Tentukan pH dari larutan tersebut.
Petunjuk: $\text{pH} = -\log [\text{H}^+]$.
- Suatu larutan x mengandung konsentrasi $2 \cdot 10^{-3}$ M. Tentukan pOH dari larutan tersebut.
Petunjuk: $\text{pOH} = 14 - \text{pH}$.
- Jika ${}^3\log 4 = a$ dan ${}^3\log 5 = b$, nilai dari ${}^{25}\log 12$ adalah....