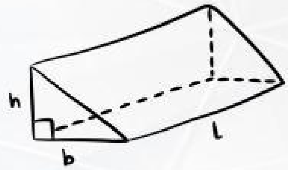
Universidad Nacional Autónoma de México

Calculo I



$$V = \frac{1}{2} bhl$$

Song Laguna Eric Alejandro

LIVEWORKSHEETS

APRENDIZAJES

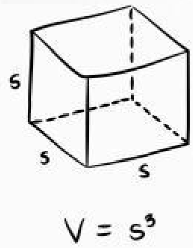
Al término de la unidad, el alumno:

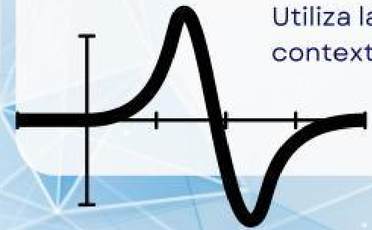
Obtendrá la derivada de una función polinomial de grados 1, 2 y 3 usando la definición.

Obtiene la derivada de funciones algebraicas usando las reglas de derivación y la regla de la cadena.

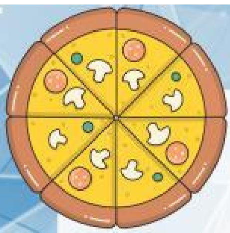
Explica la relación entre la derivada de una función lineal y la pendiente de la recta.

Utiliza la función derivada para resolver problemas de diferente contexto.

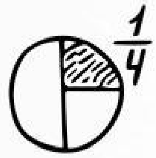




LIVEWORKSHEETS



Introducción

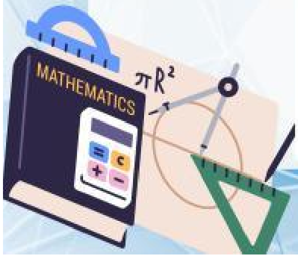


Derivada de funciones algebraicas

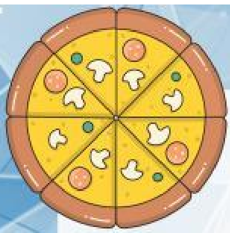
En la unidad anterior se analizó la razón de cambio para funciones polinomiales, como una medida de la variación de la función. Se concluyó que el grado n de un polinomio coincide con el hecho de que el n-ésimo cambio es constante. Además, se analizó la razón de cambio instantáneo como un límite de las razones de cambio promedio y se llegó al concepto matemático de lo que llamamos derivada.

La derivada de la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, en $x = a$, **se define** como

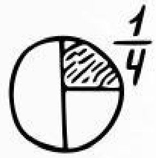
$$f'(a) = \lim_{u \to a}\left[\frac{f(u)-f(a)}{u-a}\right] \quad (3.1)$$



LIVEWORKSHEETS



Al calcularla directamente se tiene el problema de que resulta una indeterminación, ya que tanto el numerador como el denominador resultan cero. Por culpa de ello, antes de evaluar el límite es necesario simplificar el cociente.



Para precisar la notación, tenga en mente que el símbolo compuesto $f'(a)$:

(a) se lee, efe prima de a.

(b) representa la derivada de $f(x)$ en el valor $x = a$. Y,

(c) $\lim_{u \to a}\left[\frac{f(u)-f(a)}{u-a}\right]$ es la forma de calcular el valor $f'(a)$.

A principios del siglo XVII, se obtenía la recta tangente a las curvas llamadas cónicas (circunferencia, elipse, hipérbola,...) en cualquiera de sus puntos, mediante un método particular para cada una de ellas usando regla y compás. Con otro tipo de curva resultaba muy complicado el proceso geométrico o de plano no se podía, para lograrlo se propusieron métodos analíticos (ya comenzaba a funcionar la geometría analítica). Por ejemplo, el método de las raíces dobles, propuesto por René Descartes, funciona como método común para las cuadráticas, pero falla con las demás. Una idea algo diferente fue la expresión (3.1), aunque está escrita a la moderna, y fue propuesta por Pierre Fermat (contemporáneo de Descartes). Con ella, ahora sí, se logra obtener la

LIVEWORKSHEETS

tangente a cualquier curva y en cualquiera de sus puntos. Un retoque a esta forma fue dado por Isaac Newton, al considerar incrementos en las variables, pero la determinación de la tangente a una curva sigue siendo básicamente la misma idea dada por Fermat (Lagrange lo consideró como el primer inventor del cálculo).

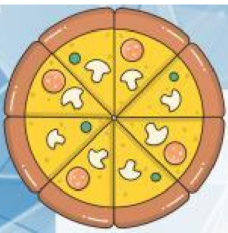
En la presente unidad, retomaremos el estudio de la derivada a partir de su definición. Para aprender y dominar el límite se practicará únicamente con la función polinomial. En lo posible y a partir de casos particulares se pronosticará primero la regla que permita derivar rápidamente y se realizará la deducción de su forma general. Con ello, podremos simplificar el trabajo para derivar funciones más complicadas en su expresión y así nos evitamos el engorroso proceso de evaluar los límites. Al final, se plantearán algunos casos en los que se aplica la derivada entre ellos la pendiente de la recta tangente, la velocidad, la aceleración, etc.

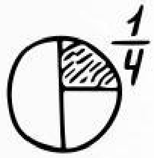
LIVEWORKSHEETS

Derivada de una función polinomial.

Una función polinomial de grado n tiene la forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1$, con $a \neq 0$. Además, se sabe que es una función real de variable real, $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Es decir, los valores que toman tanto el argumento como la imagen de la función son números reales. Al finalizar la sección, nuestro objetivo es calcular la derivada de este tipo de funciones, ya sea a partir de la definición o mediante las reglas para derivar rápido.

LIVEWORKSHEETS



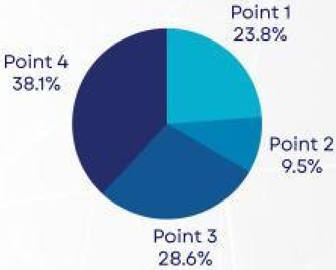


DERIVADA DE UNA FUNCIÓN POLINOMIAL.

Una función polinomial de grado n tiene la forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1$, con $a \neq 0$. Además, se sabe que es una función real de variable real, $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Es decir, los valores que toman tanto el argumento como la imagen de la función son números reales. Al finalizar la sección, nuestro objetivo es calcular la derivada de este tipo de funciones, ya sea a partir de la definición o mediante las reglas para derivar rápido.

Como práctica comencemos a calcular la derivada de estas funciones, pero formadas con un solo monomio, $f(x) = a_n x^n$.

LIVEWORKSHEETS



Ejemplo

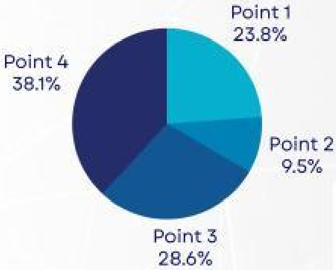
Ejemplo 1. Determine $f'(3)$, cuando $f(x) = x^2$.

Se sabe que $f(x) = x^2$, en consecuencia $f(3) = 3^2 = 9$ y $f(u) = u^2$. Al utilizar la definición de derivada para $x = 3$, resulta:

$$
\begin{aligned}
f'(3) &= \lim_{u \to 3}\left[\frac{f(u) - f(3)}{u-3}\right] && \text{es la definición} \\
&= \lim_{u \to 3}\left[\frac{u^2 - 9}{u-3}\right] && \text{se sustituye la información} \\
&= \lim_{u \to 3}[u+3] && \text{simplificando el cociente} \\
&= 3+3 && \text{evaluando el límite} \\
&= 6 && \text{suma algebraica}
\end{aligned}
$$

Conclusión: $f'(3) = 6$, cuando $f(x) = x^2$.

LIVEWORKSHEETS



Ejemplo

Conclusión: $f'(3) = 6$, cuando $f(x) = x^2$.

La simplificación del cociente puede realizarlo mediante la división de polinomios o con la división sintética, como se aprendió en cursos anteriores.

$$\begin{array}{r|l} & u + 3 \\ \hline u-3 & u^2 \qquad -9 \\ & \underline{-u^2 + 3u} \\ & \qquad 3u - 9 \\ & \qquad \underline{-3u + 9} \\ & \qquad\quad 0 \end{array} \qquad \text{de donde} \qquad \frac{u^2 - 9}{u - 3} = u + 3$$

LIVEWORKSHEETS