Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 1

Lista de Exercícios – Semana 04

Temas abordados: Limites envolvendo o infinito; Assíntotas
Seções do livro: 2.4

1) Explique o que significa dizer que a reta $x = a$ é uma assíntota vertical da função f. Em seguida, considerando as funções esboçadas nos gráficos abaixo, determine as assíntotas verticais sugeridas por cada um deles.

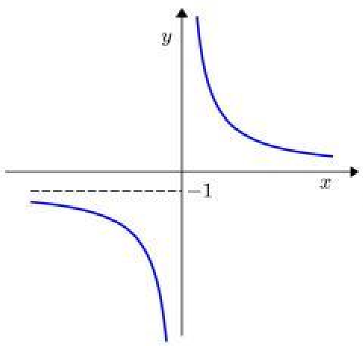

Figura 1

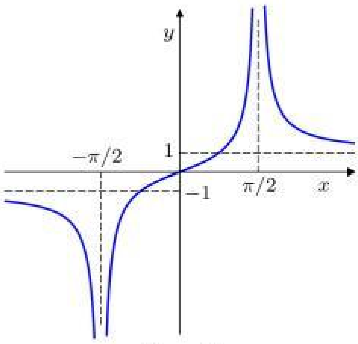

Figura 2

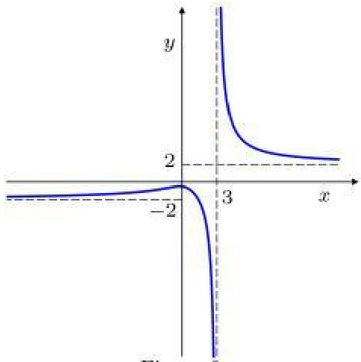

Figura 3

2) No limite $\lim_{x \to a} f(x)/g(x)$, quando o numerador se aproxima de um número diferente de zero e o denominador tende para zero com um sinal definido, temos um limite infinito. Neste caso, é necessário estudar o sinal da fração quando x está próximo de a, de modo a decidir se o limite é $+\infty$ ou $-\infty$. Por exemplo,

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 + 4x - 2}{1 - x^3} = -\infty,$$

pois o numerador se aproxima de $1^2 + 4 \cdot 1 - 2 = 3 > 0$ e o denominador se aproxima de zero por valor negativos, pois $x > 1$ (lembre que o limite é pela direita). Assim, a fração tem sinal negativo e, em módulo, fica muito grande.

Siga este procedimento para calcular os limites abaixo. (veja vídeo)

(a) $\lim_{x \to 3^-} \frac{2x - 8}{x - 3}$

(b) $\lim_{x \to 2} \frac{1 - 4x}{(x - 2)^2}$

(c) $\lim_{x \to (-1)^+} \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + x}$

(d) $\lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{4x + 8}}{-x^2 + 3x - 2}$

3) Calcular assíntota verticais não é o mesmo que igualar denominadores a zero! Por exemplo, o denominador da função $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ se anula em $x = 2$, mas

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)} = 4,$$

e portanto $x = 2$ não é assíntota vertical. Para as funções abaixo, determine os candidatos à assíntota para, em seguida, checar se cada um deles é de fato assíntota. (veja Exemplo 4 do Texto 1)

(a) $f(x) = \frac{3x + 12}{x^2 - 3x - 28}$

(b) $f(x) = \frac{x}{x^3 - x}$

(c) $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$

4) Explique o que significa dizer que a reta $y = L$ é uma assíntota horizontal da função f. Em seguida, considerando os gráficos esboçados no Exercício 1, determine as assíntotas horizontais sugeridas por cada um deles.

5) Em alguns casos, o cálculo do limite no infinito de frações pode ser feito identificando-se os termos dominantes do numerador e do denominador, e colocando-se um deles em evidência. Por exemplo,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+4x-2}{1-x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3(\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x^3})}{x^3(\frac{1}{x^3}-1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x^3}}{\frac{1}{x^3}-1} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Siga este procedimento para calcular os limites abaixo. (veja vídeo)

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{4x+9}{2x^2-4x-1}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2-4x+8}{8x-x^2}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+4}{x-1}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{8x^3-3}{2x^3+4x-7}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x+2}}{x+1}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x+\sqrt[3]{x}}{x^2+1}$

Dica: no item (e) lembre que $\sqrt{x^2} = |x|$ e proceda como neste vídeo

6) Calcule os limites abaixo.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to-1^-} \left(\frac{3}{x+1} - \frac{5}{x^2-1}\right)$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to5^-} \frac{\sqrt{25-x^2}}{5-x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (3x^3-4)$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{5-4x}{2x-3}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{2+\frac{3}{x}}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos(x)$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\operatorname{sen}^3(x)}{5x+6}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(1+\cos^2(x))}{(x+\cos(x))^2}$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-1}-x)$ (j) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2-1}-x)$

Dica: Se tiver dúvida nos dois últimos itens, veja o Exemplo 6 do Texto 2. Para aqueles que envolvem as funções seno e cosseno lembre que elas são periódicas e limitadas.

7) Determine todas as assíntotas das funções abaixo. (veja vídeo)

(a) $g(x) = \dfrac{2x^2+1}{2x^2-3x}$ (b) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$

(c) $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2}$ (d) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

(e) $f(x) = x + \operatorname{sen}(x)$ (f) $f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2} & \text{se } x \geq 0,\ x \neq 4 \end{cases}$

Dica: se tiver dúvidas no no item (f), veja este vídeo

8) Dizemos que uma reta $y = mx + b$ é uma assíntota do gráfico de uma função f quando

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0.$$

Quando $m = 0$, temos a assíntota horizontal $y = b$. Quando $m \neq 0$ temos uma assíntota oblíqua. Por exemplo, a reta $y = x - 4$ é uma assíntota oblíqua de $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$, uma vez que

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} - (x - 4) \right] &= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{(x^2 - 3x + 2) - (x^2 - 3x - 4)}{x + 1} \right] \\ &= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{6}{x + 1} \right] = 0. \end{aligned}$$

Verifique, nos itens abaixo, que a reta dada é uma assíntota da função f indicada:

(a) $y = 3x + 2$ de $f(x) = 3x + 2 + \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$;

(b) $y = 2x + 6$ de $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2 - 3x + 1}$;

(c) $y = x$ e $y = -x$ de $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

9) Para funções racionais $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ com $\text{grau}(p) = 1 + \text{grau}(q)$, sempre há assíntota oblíqua. Por exemplo, se $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 1}$, então, dividindo $p(x) = x^2$ por $q(x) = x + 1$, obtemos que $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x + 1}$, donde segue que a reta $y = x - 1$ é uma assíntota oblíqua para f. Determine as assíntotas oblíquas das funções racionais abaixo:

(a) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$ (b) $f(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^3 + x^2}$

10) Se $y = mx + b$ é uma assíntota oblíqua de f, então

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{e} \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = b.$$

Logo, uma estratégia para encontrar as assíntotas é verificar se o limite $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ é finito. Em caso afirmativo, denotamos por m o valor deste limite e verificamos se o limite $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx]$ é finito. Se este também for finito, denotamos por b seu resultado e obtemos assim a assíntota $y = mx + b$. O mesmo vale quando $x \to -\infty$. Utilize este procedimento para calcular as assíntotas das funções abaixo:

(a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ (b) $f(x) = \sqrt[3]{8x^3 - 5x}$ (c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{3x - 1}$

RESPOSTAS

1) A reta $x = a$ é uma assíntota vertical de f se qualquer um dos limites laterais neste ponto é igual a $+\infty$ ou $-\infty$.

Os gráficos esboçados, se representam a função $f(x)$, sugerem as seguintes assíntotas verticais:

- Gráfico 1: a reta $x = 0$ é uma assíntota vertical, pois $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, ou porque $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.
- Gráfico 2: as retas $x = -\pi/2$ e $x = \pi/2$ são assíntota verticais.
- Gráfico 3: a reta $x = 3$ é uma assíntota vertical.

2) (a) $+\infty$ (b) $-\infty$ (c) $-\infty$ (d) $+\infty$

3) (a) os candidatos são $x = 7$ e $x = -4$. Temos que $\lim\limits_{x\to -4} f(x) = -3/11$, e portanto $x = -4$ não é assíntota. No outro ponto temos $\lim\limits_{x\to 7^-} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to 7^+} f(x) = +\infty$, e portanto $x = 7$ é assíntota vertical.

(b) os candidatos são $x = 0$, $x = -1$ e $x = 1$. A primeira reta não é assíntota e as duas últimas são.

(c) o candidato é $x = 0$, que não é assíntota pois $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}(x)/x = 1$.

4) A reta $y = L$ é uma assíntota horizontal da função f quando $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = L$ ou $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = L$.

Os gráficos esboçados, se representam a função $f(x)$, sugerem as seguintes assíntotas horizontais:

- Gráfico 1: as retas $y = 0$ e $y = -1$ são assíntotas horizontais, pois $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -1$.
- Gráfico 2: as retas $y = -1$ e $y = 1$ são assíntotas horizontais, pois $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = \pm 1$.
- Gráfico 3: as retas $y = -2$ e $y = 2$ são assíntotas horizontais.

5) (a) 0 (b) -4 (c) $+\infty$ (d) 4 (e) $\begin{cases} 1 & \text{se } x \to +\infty \\ -1 & \text{se } x \to -\infty \end{cases}$ (f) 0

6)

(a) $-\infty$	(b) $+\infty$	(c) $-\infty$	(d) -2	(e) $\sqrt[3]{2}$
(f) não existe	(g) $1/5$	(h) não existe	(i) 0	(j) $-1/2$

7) (a) Verticais: $x = 0$ e $x = 3/2$, Horizontais: $y = 1$

(b) Verticais: não existem, Horizontais: $y = 2$ e $y = -2$

(c) Verticais: não existem, Horizontais: $y = -1$ e $y = 1$

(d) Verticais: $x = -2$ e $x = 2$, Horizontais: $y = -1$ e $y = 1$

(e) Verticais: não existem, Horizontais: não existem

(f) Verticais: $x = 0$, Horizontais: não existem

8)

9) (a) $y = x$ (b) $y = x - 1$.

10) (a) $y = x$ e $y = -x$ (b) $y = 2x$ (c) $y = \frac{x}{3} + \frac{1}{9}$.