



MODUL

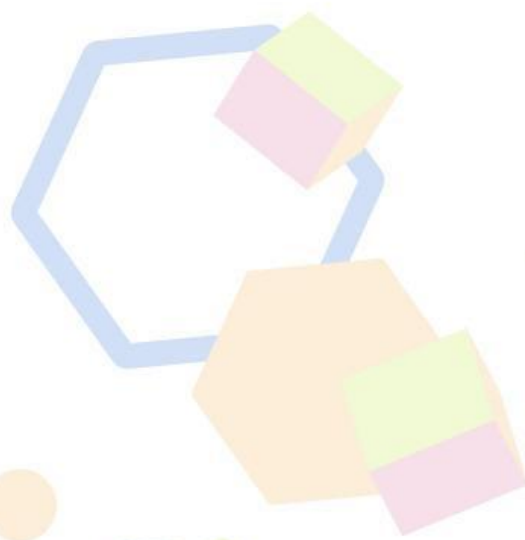
TRIGONOMETRI

MATEMATIKA

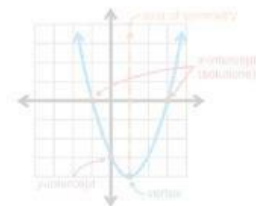
SMA KELAS XI



UNIVERSITAS
NEGERI JAKARTA



$f(x)$



Valeryan Yusuf

1110823009

Magister Teknologi Pendidikan

2023

Universitas Negeri Jakarta

DAFTAR ISI

Daftar Isi

I

Pendahuluan

II

Peta Konsep

III

Bab Trigonometri

1

1. Identitas Trigonometri

1

2. Persamaan Trigonometri

2

3. Persamaan Fungsi Trigonometri

3

Latihan

6

Rangkuman

7

Tes Formatif

8

Glosarium

9

Daftar Pustaka

10

PENDAHULUAN

DESKRIPSI SINGKAT

Modul ini berisi materi tentang konsep dan operasi matematika menggunakan aturan sinus dan cosinus, fungsi trigonometri serta penerapan, penggunaan dan penyelesaian masalah yang melibatkan trigonometri dalam aktifitas sehari-hari di rumah, lingkungan tempat tinggal, dan di masyarakat. Sebelum mempelajari modul ini, Anda sudah harus menguasai *materi prasyarat* yaitu tentang konsep pengukuran dan satuan sudut, sifat-sifat sudut dan perbandingan sisi-sisi pada segitiga.

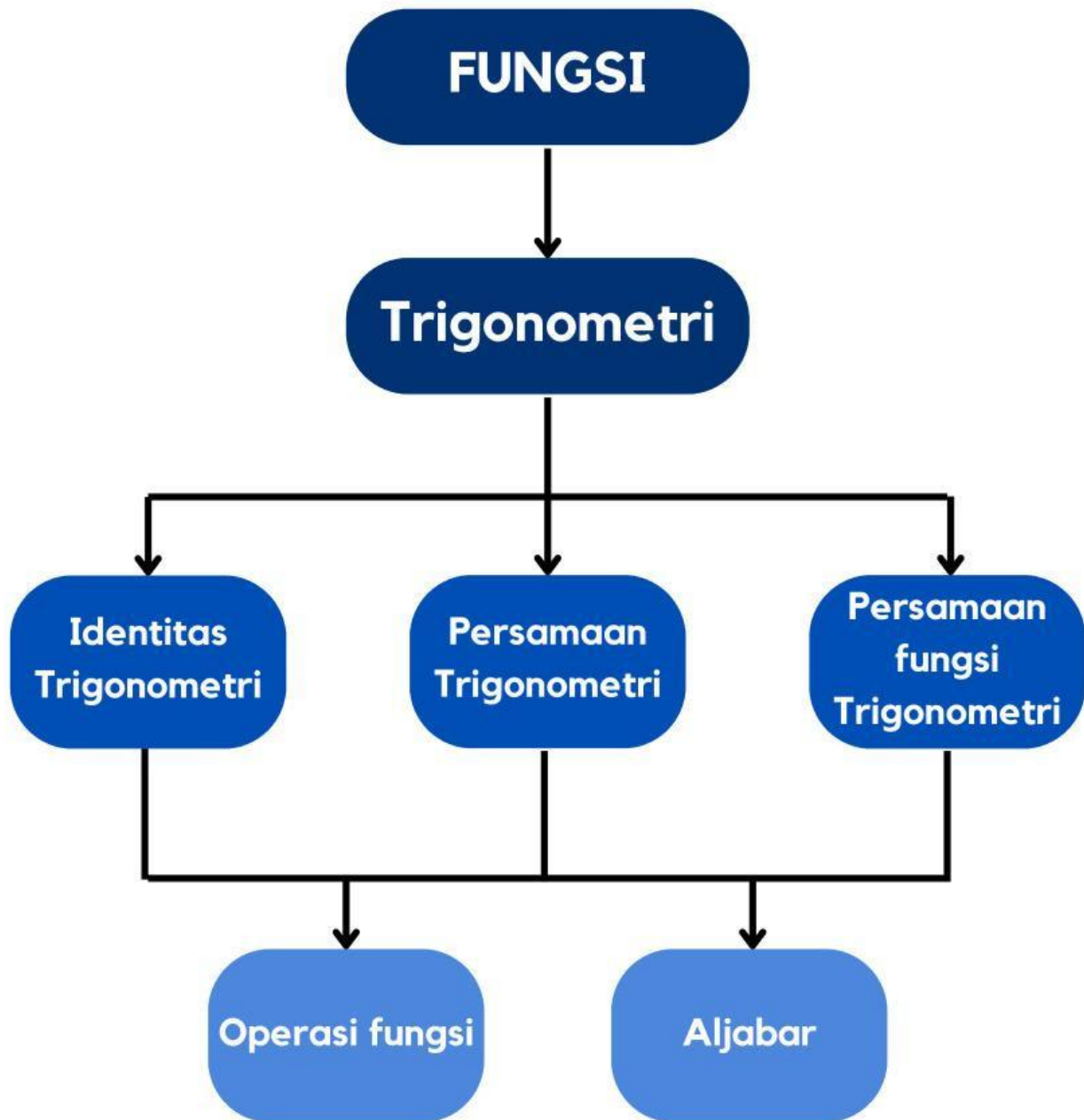
TUJUAN INSTRUKSIONAL

Peserta didik mampu menyelesaikan menyelesaikan operasi fungsi trogonometri.

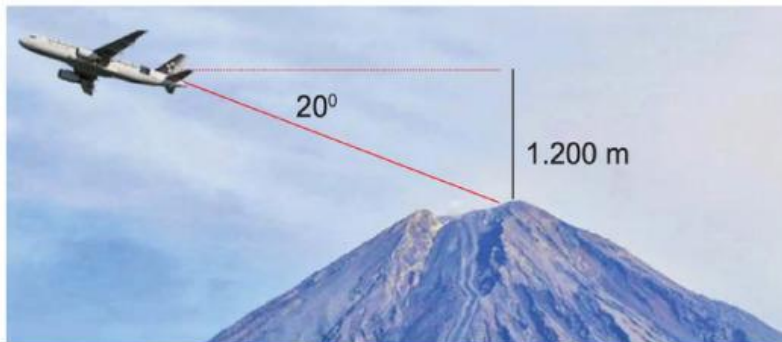
PETUNJUK BELAJAR

1. Mengikuti jadwal kontrak belajar yang telah disepakati dengan guru
2. Membaca dan memahami uraian materi pembelajaran
3. Mengidentifikasi materi-materi pembelajaran yang sulit atau perlu bantuan konsultasi dengan guru, sedangkan materi lainnya dipelajari dan dikerjakan secara mandiri atau penguatan pembelajaran bersama guru
4. Melaksanakan tugas-tugas dalam modul dengan benar untuk lebih memahami materi pembelajaran
5. Mengerjakan soal dan latihan dengan benar untuk lebih memahami materi pembelajaran
6. Mengerjakan soal penilaian akhir modul untuk lebih memahami materi pembelajaran dengan benar
7. Apabila Anda mengalami kesulitan mengerjakan tugas karena keterbatasan sarana, prasarana, alat, media dan bahan belajar yang diperlukan, maka Anda dapat berkonsultasi dengan rekan sejawat untuk merancang tugas alternative yang setara
8. Apabila Anda mengalami kesulitan mengerjakan soal, latihan dan penilaian akhir modul, maka dapat berkonsultasi dengan guru.
9. Apabila Anda mengalami kesulitan atau ingin mendalami lebih lanjut uraian materi, melaksanakan tugas pembelajaran, latihan dan soal yang diberikan belum cukup membuat Anda menguasai kompetensi yang diharapkan, maka Anda perlu mempelajari lebih lanjut referensi dan daftar pustaka suatu materi pembelajaran

PETA KONSEP



BAB TRIGONOMETRI



Seorang pilot pesawat melihat puncak gunung dari ketinggian 1200 m. Pada mesin pesawat tertulis sudut depresi (sudut lihat pilot terhadap arah mendatar) sebesar 28 derajat.

Apakah pesawat yang dikendarai pilot tersebut akan tertabrak dengan puncak gunung? Bagaimana pilot dapat memperkirakannya? Kamu dapat memberikan apakah pesawat dapat melewati puncak gunung dengan aman atau tidak setelah mempelajari fungsi dari trigonometri.

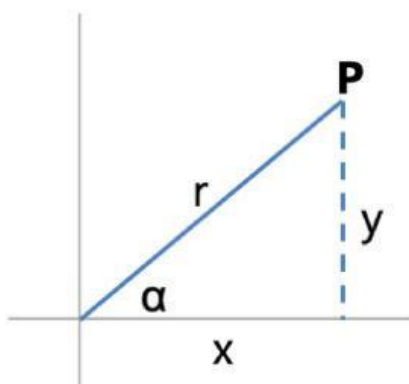
Untuk memahaminya mari kita simak pemaparan materi yang ada pada modul ini!

1

IDENTITAS TRIGONOMETRI

Identitas trigonometri digunakan untuk membuktikan kebenaran suatu persamaan trigonometri.

Identitas nilai perbandingan trigonometri didapat dari:



$$\sin \alpha = \frac{y}{r} \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{x^2 + y^2}{r^2}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Identitas nilai perbandingan trigonometri didapat dari:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

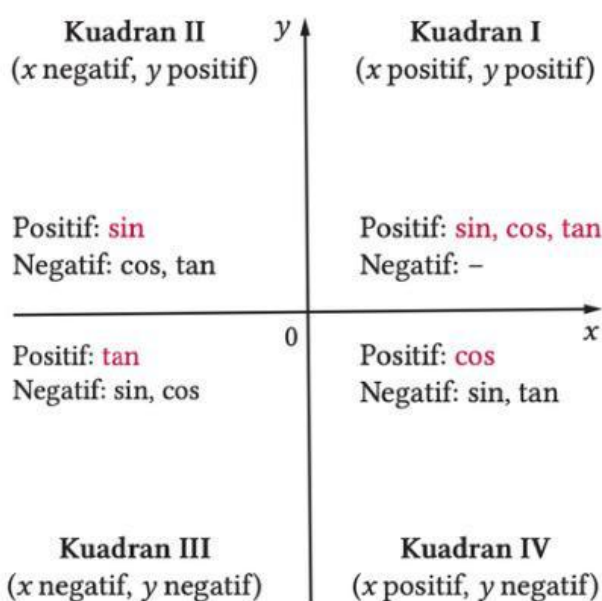
$$1 + \cot^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$$

2

PERSAMAAN TRIGONOMETRI



Hubungan antara dua persamaan sinus mempunyai penyelesaian.

$$\sin x = \sin a$$

apabila,

$$x = a + k.360$$

(kuadran I)

$$x = (180 - a) + k.360$$

(kuadran II)

Hubungan antara dua persamaan cosinus mempunyai penyelesaian.

$$\cos x = \cos a$$

apabila,

$$x = a + k.360$$

(kuadran I)

$$x = -a + k.360$$

(kuadran IV)

Hubungan antara dua persamaan tangen mempunyai penyelesaian.

$$\tan x = \tan a$$

$$x = a + k.180$$



Dengan k merupakan bilangan bulat.

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian dari:

$$\sin(2x) + \cos(x-15) = 0, \text{ dengan } 90^\circ < x < 360^\circ$$

Jawaban:

$$\sin(2x) = -\cos(x-15)$$

$$\sin(2x) = \sin(270 + (x-15)) \quad (\text{kuadran IV})$$

$$\sin(2x) = \sin(255 + x)$$

Himpunan penyelesaian di kuadran I:

$$2x = 255 + x + k.360$$

$$x = 255 + k.360$$

(masukkan nilai k)

$$x = \{-405, 255, 615\}$$

$$k = -1 \quad k = 0 \quad k = 1$$

Himpunan penyelesaian di kuadran II:

$$2x = 180 - (255 + x) + k.360$$

$$2x = -75 - x + k.360$$

$$3x = -75 + k.360$$

$$x = -25 + k.120 \quad (\text{masukkan nilai } k)$$

$$x = \{-25, 95, 215, 335, 455\}$$

$$k = 0 \quad k = 1 \quad k = 2 \quad k = 3 \quad k = 4$$

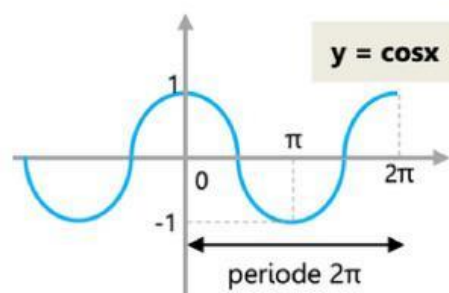
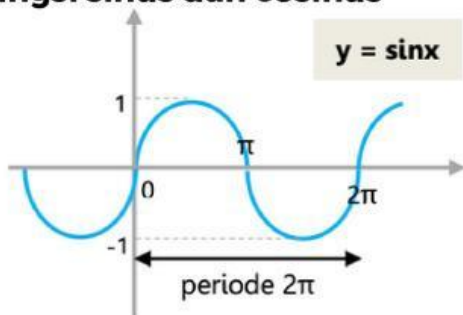
Himpunan penyelesaian akhir:

$$x = \{95, 215, 255, 335\}$$

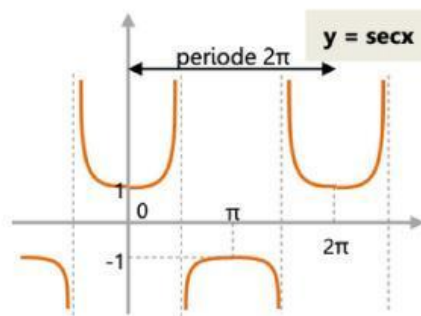
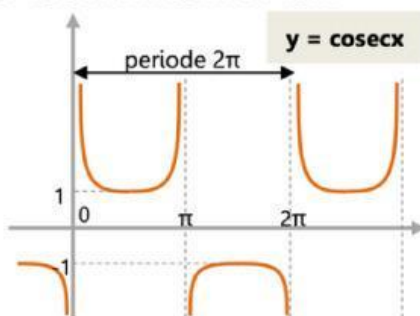
3 PERSAMAAN FUNGSI TRIGONOMETRI

Grafik fungsi trigonometri antara lain:

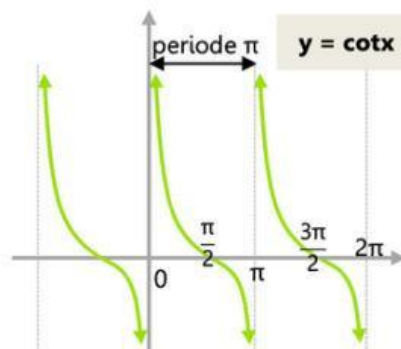
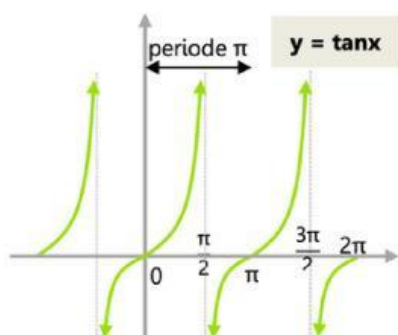
Fungsi sinus dan cosinus



Fungsi cosecan dan secan



Fungsi tangen dan cotangen



Bentuk umum persamaan fungsi sinus dan cosinus:

$$y = \pm a \sin(bx \pm c) \pm d \quad y = \pm a \cos(bx \pm c) \pm d$$

Makna persamaan fungsi sinus dan cosinus:

1. Amplitudo fungsi

$$\pm a$$

Jika $a > 0$ (**positif**), maka grafik bergerak naik ke amplitudo tertinggi lebih dulu.
Jika $a < 0$ (**negatif**), maka grafik bergerak turun ke amplitudo terendah lebih dulu.

2. Periode fungsi

$$\frac{360^\circ}{b}$$

Satu periode dibagi menjadi 4 daerah yang sama besar.

3. Pergeseran horizontal grafik

$$\frac{c}{b}$$

Jika $c/b > 0$ (**positif**), maka grafik bergeser ke kiri sebesar c/b .
Jika $c/b < 0$ (**negatif**), maka grafik bergeser ke kanan sebesar c/b .

4. Pergeseran vertikal grafik

$$d$$

Jika $d > 0$ (**positif**), maka grafik naik ke atas sebesar d .
Jika $d < 0$ (**negatif**), maka grafik turun ke bawah sebesar d .

5. Nilai maksimum dan minimum grafik

Nilai maksimum:

$$|a| + d$$

Nilai minimum:

$$-|a| + d$$

Hubungan persamaan fungsi sinus dan cosinus:

1. Sudut persamaan sinus ke cosinus ditambah 270 derajat sesuai konsep sudut berelasi.
2. Sudut persamaan cosinus ke sinus ditambah 90 derajat sesuai konsep sudut berelasi.
3. Sudut yang terlalu kecil atau terlalu besar dapat disederhanakan menggunakan konsep:

$$\alpha = \alpha \pm k.360^\circ$$

Contoh:

Ubah ke persamaan berikut ke sinus atau cosinus!

a. $y = 2 \sin(3x + 100)$

$$y = 2 \cos(270 + (3x + 100))$$

$$y = 2 \cos(370 + 3x) \quad y = 2 \cos(3x + 10)$$

b. $y = -3 \cos(x + 4)$

$$y = -3 \sin(90 + (x + 4)) \quad y = -3 \sin(x + 94)$$

Contoh:

Cara menggambar grafik sinus dan cosinus:

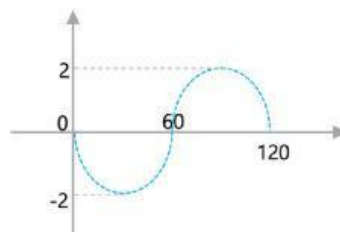
Contoh:

Buatlah gambar grafik satu periode dari persamaan fungsi $y = -2 \cdot \sin(3x-60) + 1$!

Langkah 1:

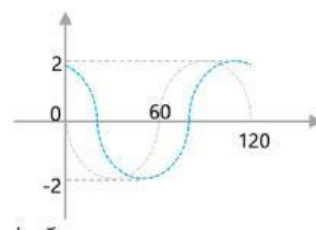
Buat grafik dasar sebelum pergeseran, yaitu persamaan menjadi $y = -2 \cdot \sin(3x)$, dengan:

- Amplitudo grafik adalah 2 dan grafik bergerak turun ke -2 lebih dulu.
- Periode grafik adalah $\frac{360}{3}$ atau 120° .



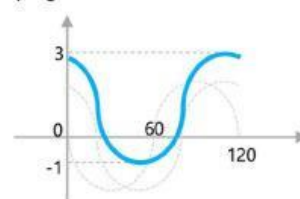
Langkah 2:

Buat grafik persamaan $y = -2 \cdot \sin(3x-60)$, dengan pergeseran horizontal ke kiri sebesar 20° .



Langkah 3:

Buat grafik persamaan $y = -2 \cdot \sin(3x-60) + 1$, dengan pergeseran vertikal ke atas sebesar 1.



Grafik fungsi sinus dan cosinus juga dapat diubah menjadi sebuah persamaan, dengan:

Nilai a

$$a = \frac{a_{\text{maks}} - a_{\text{min}}}{2}$$

Nilai b

$$b = \frac{360^\circ}{p}$$

Nilai c

Fungsi sinus

$$c = 90 - b \cdot x_{\text{puncak}}$$

Fungsi cosinus

$$c = -b \cdot x_{\text{puncak}}$$

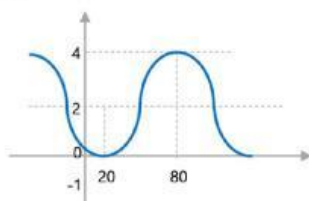
Nilai d

$$d = \frac{a_{\text{maks}} + a_{\text{min}}}{2}$$

Contoh:

Cara menentukan persamaan fungsi sinus dan cosinus dari grafik:

Contoh:



Tentukan persamaan fungsi grafik di atas!

Jawab:

$$a = \frac{4-0}{2} = 2$$

Periode grafik di atas adalah 2 kali jarak antar puncak, yaitu 120° .

$$b = \frac{360^\circ}{120^\circ} = 3$$

$$c = 90 - 3 \cdot 80 = 90 - 240 = -150$$

$$d = \frac{4+0}{2} = 2$$

Maka persamaan yang dapat dibentuk:

$$y = 2 \cdot \sin(3x - 150) + 2 \quad (\text{fungsi sinus})$$

$$y = 2 \cdot \cos(3x + 120) + 2 \quad (\text{fungsi cosinus})$$

LATIHAN

1. Grafik fungsi $y = 3 + \sin x$
 - A. memotong sumbu x di banyak titik
 - B. memotong sumbu x di tiga titik
 - C. tidak memotong sumbu x
 - D. memotong sumbu y dibanyak titik
 - E. tidak memotong sumbu y
2. Dalam selang $0 < x < 2\pi$, grafik fungsi $y = \frac{\sin x + 4}{\sin x - 1}$ terletak di bawah sumbu x hanya untuk ...
 - A. $\frac{1}{2}\pi < x < \pi$
 - B. $\frac{1}{2}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$
 - C. $0 < x < \pi$
 - D. semua x
 - E. semua $x \neq \frac{1}{2}\pi$ dan $x \neq \frac{3}{2}\pi$
3. Diketahui $f(x) = 3 \cos x + 4 \sin x + c$, c suatu konstanta. Jika nilai maksimum $f(x)$ adalah 1, maka nilai minimumnya ...
 - A. 0
 - B. -1
 - C. -5
 - D. -9
 - E. -25
4. Nilai minimum dan maksimum dari fungsi $y = \sin x + \cos x + 1$ berturut-turut adalah ...
 - A. 0
 - B. -1
 - C. -5
 - D. -9
 - E. -25
5. Diketahui fungsi $f(x) = \frac{2 + \cos x}{\sin x}$. Garis singgung grafiknya $x = \frac{\pi}{2}$ memotong sumbu y di titik $(0, b)$, b adalah ...
 - A. 2
 - B. $\frac{\pi}{2}$
 - C. $-2 + \frac{\pi}{2}$
 - D. $2 - \frac{\pi}{2}$
 - E. $2 + \frac{\pi}{2}$

LATIHAN

II Selesaikan

Lukis grafik $y = \sqrt{3} \cos x^\circ + \sin x^\circ$ dalam interval $0 \leq x \leq 360$, dengan langkah-langkah sebagai berikut :

- Mengubah menjadi bentuk $k \cos (x - a)^\circ$
- Menentukan koordinat titik balik maksimum dan minimum
- Menentukan pembuat nol
- Melukis grafiknya.

Rangkuman

1. Identitas nilai perbandingan trigonometri didapat dari:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

$$\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$$

2. Hubungan antara dua persamaan sinus mempunyai penyelesaian.

$$\sin x = \sin a$$

$$\cos x = \cos a$$

$$\tan x = \tan a$$

3. Grafik fungsi trigonometri antara lain:

- Fungsi sinus dan cosinus
- Fungsi cosecan dan secan
- Fungsi tangen dan cotangen

4. Bentuk umum persamaan fungsi sinus dan cosinus:

$$y = \pm a \sin(bx \pm c) \pm d$$

$$y = \pm a \cos(bx \pm c) \pm d$$

Tes Formatif

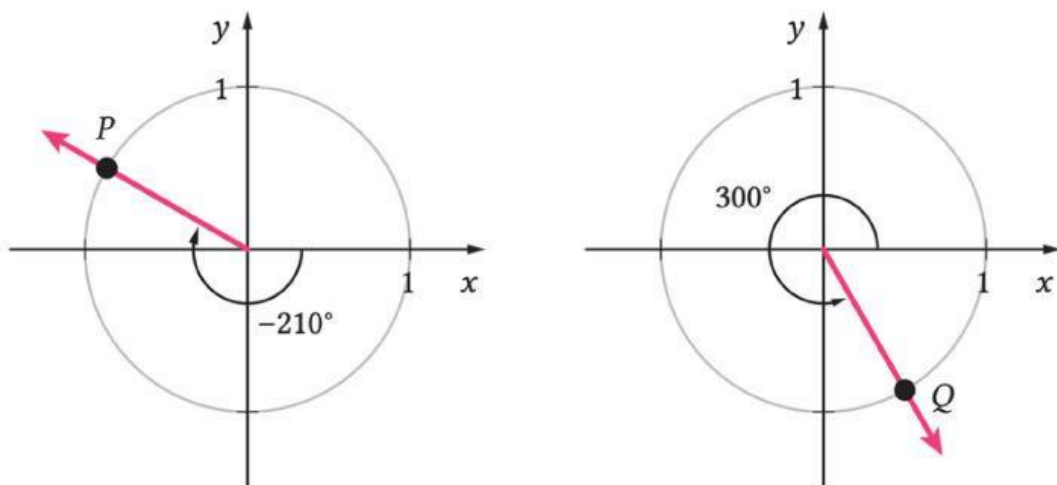


Pemahaman Konsep

1. Benar atau Salah. Jika sudut θ berada dalam posisi baku dan sisi akhirnya melalui titik $(-2, 5)$, maka nilai $\tan \theta = -2/5$.
2. Benar atau Salah. Jika nilai $\sin \theta = 1/3$, maka θ berada pada kuadran 1.
3. Untuk sebarang sudut θ , $1 - \sin^2 \theta = \dots$
4. Periode grafik fungsi $y = \tan x$ adalah $\dots$
5. Grafik fungsi $y = a \sin bx$ memiliki amplitudo $\dots$ dan periode $\dots$

Penerapan Konsep

6. Titik P dan titik Q berada pada lingkaran satuan seperti yang ditunjukkan pada Gambar 5.21.



Gambar 5.21 Titik P dan Q pada Lingkaran Satuan

Tentukan koordinat titik P dan titik Q tersebut.

7. Tentukan nilai $\sin(-30^\circ)$, $\cos 225^\circ$, dan $\tan 870^\circ$.
8. Jika $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ dan $\tan \theta = -3$, tentukan nilai $\sin \theta$ dan $\cos \theta$.
9. Buktikan bahwa $\cos \theta \left(\frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta \right) = \sin^2 \theta$.
10. Tentukan amplitudo, jika ada, dan periode fungsi-fungsi berikut, kemudian sketsalah grafiknya.
 - a). $y = \frac{1}{2} \cos x$
 - b). $y = \tan\left(\frac{\pi}{10} x\right)$

GLOSARIUM

fungsi : pemetaan setiap anggota suatu himpunan (dinamakan daerah asal) kepada tepat satu anggota himpunan yang lain (dinamakan daerah kawan)

grafik : grafik suatu persamaan dalam x dan y merupakan himpunan semua titik (x, y) pada bidang koordinat yang memenuhi persamaan tersebut

identitas trigonometri : persamaan trigonometri yang selalu benar untuk setiap kemungkinan nilai variabelnya

Trigonometri : Trigonometri adalah sebuah cabang matematika yang mempelajari hubungan yang meliputi panjang dan sudut

Sinus : Sinus adalah perbandingan sisi segitiga yang ada di depan sudut dengan sisi miring (dengan catatan bahwa segitiga itu adalah segitiga siku-siku atau salah satu sudut segitiga adalah 90°).

Cosinus : Cosinus adalah perbandingan sisi segitiga yang terletak di sudut dengan sisi miring (dengan catatan bahwa segitiga itu adalah segitiga siku-siku atau salah satu sudut segitiga itu 90°)

Tangen : Tangen adalah perbandingan sisi segitiga yang ada di depan sudut dengan sisi segitiga yang terletak di sudut (dengan catatan bahwa segitiga itu adalah segitiga siku-siku atau salah satu sudut segitiga itu 90°)

Cotangen : Cotangen adalah perbandingan sisi segitiga yang ada di depan sudut dengan sisi segitiga yang terletak di sudut (dengan catatan bahwa segitiga itu adalah segitiga siku-siku atau salah satu sudut segitiga adalah 90° derajat).

DAFTAR PUSTAKA

Kristanto, Y. D., & Santoso, E. B. (2017). Aljabar dan Trigonometri. Sanata Dharma University Press. Buku ini membahas topik-topik trigonometri. Secara khusus, di buku ini kalian dapat mempelajari fungsi trigonometri, penerapannya pada segitiga, identitas-identitas trigonometri, dan persamaan trigonometri.

Kristanto, Y. D. (2016). Matematika Langkah Demi Langkah untuk SMA/ MA Kelas X. Jakarta: Grasindo.

Masta, A.A., Kristanto, Y.D., Yulfiana, E. & Taqiyuddin, M. 2021. *Matematika Tingkat Lanjut untuk SMA Kelas XI*. Jakarta: Pusat Perbukuan Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi. Tersedia di <https://buku.kemdikbud.go.id>.