

TEOREMAS BÁSICOS DE INTEGRACIÓN

FÓRMULA: $A(x + h) - A(x) \approx f(x) \cdot h$

EJERCICIOS RESUELTOS

1.- Integral de una constante:

$$\int 3dx$$

Solución:

$$\int 3dx = 3x + K$$

2.- Integral de un monomio:

$$\int 5x^2dx$$

Solución

$$\int 5x^2dx = 5 \cdot \int x^2dx$$

La derivada de x^3 es $3x^2$. Si conseguimos un 3 en el integrando, entonces tendríamos la derivada de x^3 en el integrando. Esto se consigue multiplicando y dividiendo por 3:

$$\begin{aligned} 5 \int x^2dx &= \\ &= 5 \cdot \frac{3}{3} \cdot \int x^2dx = \\ &= 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \int 3x^2dx = \\ &= 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 + K \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int 5x^2 dx = \frac{5x^3}{3} + K$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + K$$

3.- Integral de un polinomio:

$$\int (5x^2 + 3) dx$$

Como el integrando es un polinomio, su primitiva también lo es (con un grado más).

Podemos escribir la integral como una suma de integrales:

$$\begin{aligned} \int (5x^2 + 3) dx &= \\ &= \int 5x^2 dx + \int 3 dx \end{aligned}$$

Ya sabemos cómo resolver estas dos integrales:

$$\begin{aligned} \int 5x^2 dx &= \frac{5x^3}{3} + K \\ \int 3 dx &= 3x + K \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int (5x^2 + 3)dx &= \\ &= \frac{5x^3}{3} + 3x + K\end{aligned}$$

4.- Integral de un cociente de polinomios:

$$\int \frac{3x^2}{x^3 - 1} dx$$

Siempre que tengamos un cociente en el integrando, tenemos que comprobar si el numerador es la derivada del denominador.

Esto es lo que ocurre en esta integral porque la derivada de $x^3 - 1$ es $3x^2$. Por tanto, la integral tiene la forma

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

Estas integrales son muy fáciles de resolver porque son un logaritmo.

Derivamos el logaritmo de una función:

$$\begin{aligned}F(x) &= \ln(f(x)) \\ F'(x) &= \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \\ &= \frac{f'(x)}{f(x)}\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos la fórmula

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + K$$

Calculamos la integral:

$$\int \frac{3x^2}{x^3 - 1} dx = \ln|x^3 - 1| + K$$

5.- Integral de una raíz cúbica:

$$\int \sqrt[3]{x} dx$$

Cuando tenemos raíces, intentaremos simplificar el integrando escribiéndolas como potencias:

$$\int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{1/3} dx$$

La derivada de x^n es $n \cdot x^{n-1}$.

La constante que multiplica no supone un problema.

Buscamos una función x^n cuya derivada sea $x^{1/3}$:

$$n - 1 = \frac{1}{3}$$

$$n = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

Calculamos la derivada de $x^{4/3}$:

$$\begin{aligned}\left(x^{4/3}\right)' &= \frac{4}{3} \cdot x^{4/3-1} = \\ &= \frac{4}{3} \cdot x^{1/3}\end{aligned}$$

Por tanto, sólo necesitamos escribir 4/3 en el integrando para que sea la derivada de $x^{4/3}$:

$$\begin{aligned}\int x^{1/3} dx &= \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \int x^{1/3} dx = \\ &= \frac{3}{4} \cdot \int \frac{4}{3} \cdot x^{1/3} dx = \\ &= \frac{3}{4} \cdot x^{4/3} + K\end{aligned}$$

De acuerdo con los ejemplos vistos anteriormente, realiza los siguientes ejercicios.

1.-

$$\int (1 + x) \cdot \sqrt{x} \, dx$$

2.-

$$\int \frac{\ln(x^2)}{x} \, dx$$

3.-

$$\int \cos^2(x) \, dx$$