



“INTEGRAL INDIFINIDA”

BACHILLERATO GENERAL OFICIAL:
DAVID ALFARO SIQUEIROS

ASIGNATURA: CALCULO INTEGRAL

NOMBRE DEL DOCENTE: MTRO.
ABISAI ORDUÑA MARTÍNEZ

NOMBRE DEL ALUMNO: SHARON
JOCELYN FERNÁNDEZ HERNÁNDEZ,
TERESA CORTES PÉREZ

GRADO: 1 GRUPO: “A”

SEMESTRE: QUINTO

BLOQUE: 1

Integrales por sustitución o cambio de variable

El método **integración por sustitución** o **cambio de variable** se utiliza para evaluar integrales. El método se basa en realizar de manera adecuada un cambio de variable que permita convertir el integrando en algo sencillo. Este método realiza lo opuesto a la regla de la cadena.

El **método de integración por sustitución** o **cambio de variable** se basa en la derivada de la función compuesta

$$\int f'(u) \cdot u' dx = F(u) + C$$

Ejemplos:

Ejercicio 1:

$$\int \frac{x^4}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$$

Realizamos el cambio de variable y calculamos su diferencial

$$x = \sin t$$

$$dx = \cos t dt$$

Sustituimos en la integral y para simplificar empleamos identidades trigonométricas

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4}{\sqrt{(1-x^2)^3}} &= \int \frac{\sin^4 t}{\sqrt{(1-\sin^2 t)^3}} \cos t dt \\ &= \int \frac{(1-\cos^2 t)^2}{\cos^2 t} dt \\ &= \int \frac{1-2\cos^2 t + \cos^4 t}{\cos^2 t} dt \\ &= \int \frac{dt}{\cos^2 t} - 2 \int dt + \int \cos^2 t dt \\ &= \int \frac{dt}{\cos^2 t} - 2 \int dt + \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt \end{aligned}$$

Resolvemos las integrales obtenidas

$$\begin{aligned}\int \frac{dt}{\cos^2 t} - 2 \int dt + \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt &= \tan t - 2t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C \\ &= \tan t + \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{3}{4}t + C\end{aligned}$$

Regresamos a la variable inicial, para ello despejamos t en el cambio de variable inicial

$$x = \sin t \implies t = \arcsin x$$

Calculamos para el seno y el coseno de t

$$\sin 2t = 2 \sin t \cdot \cos t = 2 \sin(\arcsin x) \cdot \cos(\arcsin x) = 2x \cdot \sqrt{1 - x^2}$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - [\sin(\arcsin x)]^2} = \sqrt{1 - x^2}$$

Así el resultado se expresa en la variable x como

$$\int \frac{x^4}{\sqrt{(1-x^2)^2}} dx = \tan(\arcsin x) + \frac{x}{2} \cdot \sqrt{1-x^2} - \frac{3}{2} \arcsin x + C$$

Ejercicio 2:

$$\int \frac{dx}{1 + \cos^2 x}$$

Realizamos el cambio de variable y calculamos su diferencial

$$\tan x = t \implies x = \arctan t$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

Sustituimos en la integral y simplificamos

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{1}{1+t^2}} &= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1+1+t^2}{1+t^2}} \\
 &= \int \frac{dt}{2+t^2} \\
 &= \int \frac{dt}{2 \left[1 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right)^2 \right]} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right)^2} dt
 \end{aligned}$$

Resolvemos las integrales obtenidas

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right)^2} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} + C$$

Regresamos a la variable inicial

$$\int \frac{dx}{1 + \cos^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \tan x \right) + C$$

Ejercicio 3:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\cos x + \cos^2 x}}$$

Se realiza el cambio de variable y se calcula su diferencial

$$\tan \frac{x}{2} = t \implies x = 2 \arctan t$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Sustituimos en la integral y simplificamos

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sqrt{\cos x + \cos^2 x}} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\sqrt{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}} \\
 &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\sqrt{\frac{(1-t^2)(1+t^2) + (1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}}} \\
 &= 2 \int \frac{dt}{\sqrt{2-2t^2}} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}
 \end{aligned}$$

Resolvemos las integrales obtenidas

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \arcsin t + C$$

Regresamos a la variable inicial

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\cos x + \cos^2 x}} = \sqrt{2} \arcsin \left(\tan \frac{x}{2} \right) + C$$

Ejercicio 4:

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$$

Se realiza el cambio de variable y se calcula su diferencial

$$x = t^6 \implies t = \sqrt[6]{x}$$

$$dx = 6t^5 dt$$

Sustituimos en la integral y simplificamos

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx &= \int \frac{1 - t^3}{t^2} \cdot 6t^5 dt \\
 &= 6 \int (1 - t^3) \cdot t^3 dt \\
 &= 6 \int (t^3 - t^6) dt
 \end{aligned}$$

Resolvemos las integrales obtenidas

$$6 \int (t^3 - t^6) dt = \frac{3}{2} t^4 - \frac{6}{7} t^7 + C$$

Regresamos a la variable inicial

$$\frac{3}{2} t^4 - \frac{6}{7} t^7 + C = \frac{3}{2} \sqrt[6]{x^4} - \frac{6}{7} x \sqrt[6]{x} + C$$

Así, la solución en término de la variable es

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\cos x + \cos^2 x}} = \frac{3}{2} \sqrt[6]{x^4} - \frac{6}{7} x \sqrt[6]{x} + C$$

Ejercicio 5:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x}} dx$$

Realizamos el cambio de variable

$$\sqrt[3]{1+2x} = t \implies 1+2x = t^3 \implies x = \frac{t^3 - 1}{2}$$

Calculamos la diferencial

$$2 dx = 3t^2 dt \implies dx = \frac{3t^2 dt}{2}$$

Sustituimos en la integral y simplificamos el integrando

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x}} dx &= \int \frac{\left(\frac{t^3-1}{2}\right)^2}{t} \cdot \frac{3t^2}{2} dt \\
 &= \frac{3}{2} \int \left(\frac{t^6-2t^3+1}{4}\right) \cdot t dt \\
 &= \frac{3}{8} \int (t^7 - 2t^4 + t) dt
 \end{aligned}$$

Resolvemos la nueva integral

$$\frac{3}{8} \int (t^7 - 2t^4 + t) dt = \frac{3}{8} \left(\frac{t^8}{8} - \frac{2t^5}{5} + \frac{t^2}{2} \right) + C$$

Regresamos a la variable inicial, para ello empleamos $t = \sqrt[3]{1+2x}$

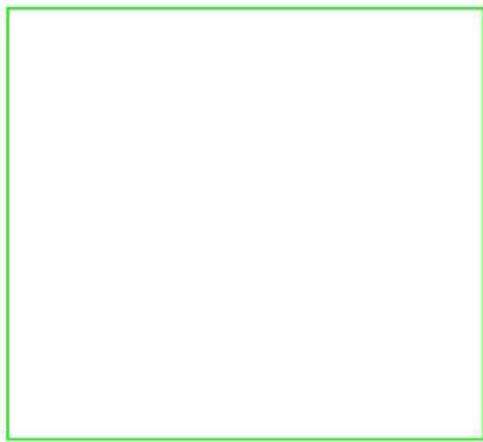
$$\frac{3}{8} \left(\frac{t^8}{8} - \frac{2t^5}{5} + \frac{t^2}{2} \right) + C = \frac{3}{64} (\sqrt[3]{1+2x})^8 - \frac{3}{20} (\sqrt[3]{1+2x})^5 + \frac{3}{16} (\sqrt[3]{1+2x})^2 + C$$

Así la solución buscada es

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x}} dx = \frac{3}{64} (\sqrt[3]{1+2x})^8 - \frac{3}{20} (\sqrt[3]{1+2x})^5 + \frac{3}{16} (\sqrt[3]{1+2x})^2 + C$$

Ejercicios a resolver

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} dx$$



$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4+x^2}}$$

$$x = 2 \tan t \quad \Rightarrow \quad t = \arctan \frac{x}{2}$$



$$\int f'(u) \cdot u' dx$$