“INTEGRAL INDIFINIDA”

BACHILLERATO GENERAL OFICIAL: DAVID ALFARO SIQUEIROS

ASIGNATURA: CALCULO INTEGRAL

NOMBRE DEL DOCENTE: MTRO. ABISAI ORDUÑA MARTÍNEZ

NOMBRE DEL ALUMNO: SHARON JOCELYN FERNÁNDEZ HERNÁNDEZ, TERESA CORTES PÉREZ

GRADO: 1 GRUPO: “A”

SEMESTRE: QUINTO

BLOQUE: 1

Integral indefinida

Integrar es el proceso inverso del de derivar. Esto significa que dada una función f(x), se buscan aquellas funciones f(x) que al ser derivadas conducen a f(x). Se dice, entonces, que f(x) es una primitiva o antiderivada de f(x). Dicho de otro modo, las primitivas de f(x) son las funciones derivables f(x) tales que:

$$F'(x) = f(x)$$

La *integral indefinida es el conjunto de las infinitas primitivas* que puede tener una función.

Mientras que la derivada de una función, cuando existe, es única, no es el caso de la primitiva, pues si f(x) es una primitiva de f(x), también lo es f(x)+c, donde *c* es cualquier constante real.

Para encontrar una primitiva de una función dada, basta con aplicar la o las integrales que se obtienen de tablas.

Ejemplo de integral indefinida

Si tenemos la función $(x)=12x^5$, ¿cuál es su integral indefinida?

Incrementamos el exponente de x por 1

Dividimos la expresión por el nuevo exponente

Sumamos la constante de integración

Entonces tenemos:

∫12*x*5*dx*=612*x*6+*c*

∫12*x*5*dx*=2*x*6+*c*

Integral logarítmica

Función logarítmica es una función cuya expresión $f(x) = log_a x$ es a > 0 $a \neq 1$

Las **fórmulas para resolver integrales logarítmicas** son las siguientes:

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$$

$$\int \ln(x)\, dx = x \cdot \ln(x) - x + C$$

$$\int \log_a(x)\, dx = \frac{x}{\ln(a)} \cdot (\ln(x) - 1) + C$$

Las funciones exponenciales y las funciones logarítmicas son inversas entre sí, es decir, son simétricas con respecto de la función identidad f(x) = x.

Ejemplos:

Ejercicio 1: $\int \frac{x^2}{x^3+8} dx$

Para resolver la siguiente integral haremos un cambio de variable $\mathrm{u} = \mathrm{x}^3 + 8$ $du = 3x^2$ y posteriormente resolvemos la integral

$$\int \frac{x^2}{x^3+8} dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3+8} dx = \frac{1}{3} ln\,(x^3+8) + C$$

Ejercicio 2: $\int cot\, x dx$

Para resolver utilizaremos la definición $\cot\ \mathrm{x} = \cos x_{\overline{sen\, x}}$ luego hacemos un cambio de variable $\mathrm{u} = \mathrm{sen}\ \mathrm{x}$ $\mathrm{du} = \cos x$ luego resolvemos la integral

$$\int cot\, x dx = \int \frac{\cos x}{sen\, x} dx = ln sen\, x + C$$

Ejercicio 3: $\int \frac{sen\, 2x}{1 + sen^2 x} dx$

Resolver la siente integral utilizamos la definición $\mathrm{sen}\ 2\mathrm{x} = 2\mathrm{sen}\ \mathrm{x}\cos x$ y luego hacemos un cambio de variable $\mathrm{u} = 1 + \mathrm{sen}^2 x$ $du = 2sen\, x \cos x$ luego resolvemos la integral

$$\int \frac{sen\, 2x}{1 + sen^2 x} dx = \int \frac{2sen\, x \cos x}{1 + sen^2 x} dx = ln(1 + sen^2 x) + C$$

Ejercicio 4: $\int tg\, 5x dx$

Para poder resolver la siente integral utilizamos la definición $\tan\ x = \text{sen}\ x_{\overline{\cos x}}$ y luego hacemos un cambio de variable $u = \cos 5x \quad du = 5sen\, 5x$

luego resolvemos la integral $\int tg\, 5x dx = \int \frac{sen\, 5x}{\cos 5x} dx = -\frac{1}{5} ln(\cos 5x) + C$

Ejercicio 5: $\int \frac{dx}{tg\, x}$

Utilizamos la definición $1_{\overline{tg\, x = cot\, x = \frac{\cos x}{sen\ x}}}$ y luego hacemos un cambio de variable $u = \text{sen}\ x \quad du = \cos x$

Luego resolvemos la integral

$$\int \frac{dx}{tg\, x} = \int \frac{\cos x}{sen\, x} dx = ln(sen\, x) + C$$

Ejercicios a resolver

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$$

$$\int \frac{2x^3 + x^2 - x}{x^2} dx$$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\,arc\,tg\,x}$$

Integrales exponenciales

Es una función especial definida en el plano complejo, se utilizan para modelar el crecimiento o decrecimiento a través del tiempo ya sea de una población de individuos, los intereses generados por un capital en el banco etc.

La fórmula para la integral de una función exponencial $\int u' e^{u}\, du = e^{u} + C$ base **e** es Se pasa la exponencial original, **siempre y cuando esté completa la derivada original del exponente *(dx)*.**

Ejemplos:

Ejemplo 1: Integra la siguiente función $\int 5e^{5x}\, dx$

Primero se hace la derivada del exponente.

Verifica que la derivada esté en la función original, si le falta algún número se le agrega de la siguiente forma:

$u = 5x$

$u' = 5$

Aplica la fórmula, quedando:

$\int u' e^{u}\, du = e^{u} + C$

$u=5x$

$u'= 5$

En esta ocasión el 5 sí está en la función, se dice que la función está completa.

$e^{5x} + C$

Ejercicio 2: $\int e^{2x+2} dx$

Observamos que la base del exponencial a es e Así mismo tenemos que $\mathrm{u(x)} = 2\mathrm{x} + 2$

Como $\mathrm{u'(x)} = 2$ entonces necesitamos multiplicar al diferencial por dos

$$\int e^{2x+2} dx = \int e^{2x+2} \cdot \frac{2}{2} dx = \frac{1}{2} \int e^{2x+2} \cdot 2dx$$

Con esto ya podemos calcular la integral

$$\int e^{2x+2}dx = \frac{1}{2}\int e^{2x+2} \cdot 2dx = \frac{1}{2}e^{2x+2} + C$$

Ejercicio 3: $\int 5^x dx$

Ahora observemos que la base es 5. Además, el argumento de la exponencial es simplemente X por lo tanto, podemos utilizar la formula directamente con $a = 5$

$$\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C$$

Ejercicio 4: $\int 2^x 5^x dx$

Recordemos que $a^c b^c = (ab)^c$ ya tiene el mismo exponente. Por lo tanto, la integral se calcula como

$$\int 2^x 5^x dx = \int (2 \cdot 5)^x dx = \int 10^x dx = \frac{10^x}{\ln 10} + C$$

Ejercicio 5: $\int 8^{3x+1}dx$

Notamos que $a = 8$ y que $u(x) = 3x + 1$ así tenemos que $u'(x) = 3$ por lo que tenemos que multiplicar el diferencial por 3 (al mismo tiempo hay que dividir por 3 para que la función siga siendo la misma): $\int 8^{3x+1}dx = \int 8^{3x+1} \cdot \frac{3}{3}dx = \frac{1}{3}\int 8^{3x+1}3dx$

Por lo tanto, la integral es

$$\begin{aligned}\int 8^{3x+1}dx &= \frac{1}{3}\int 8^{3x+1}3dx \\ &= \frac{1}{3}\frac{8^{3x+1}}{\ln 8} + C \\ &= \frac{8^{3x+1}}{3\ln 8} + C\end{aligned}$$

Ejercicios a resolver

Determina la siguiente integral

$$\int \frac{e^{lnx}}{x} dx$$

$$e^{\ln x} = x$$

$$\int e^{\sin x} \cos x dx$$

$$\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Integrales por sustitución o cambio de variable

El método **integración por sustitución** o **cambio de variable** se utiliza para evaluar integrales. El método se basa en realizar de manera adecuada un cambio de variable que permita convertir el integrando en algo sencillo. Este método realiza lo opuesto a la regla de la cadena.

El **método de integración por sustitución o cambio de variable** se basa en la derivada de la función compuesta

$$\int f'(u) \cdot u' \, dx = F(u) + \mathrm{C}$$

Ejemplos:

Ejercicio 1:

$$\int \frac{x^4}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$$

Realizamos el cambio de variable y calculamos su diferencial

x=$\sin t$

dx=$\cos t \, dt$

Sustituimos en la integral y para simplificar empleamos identidades trigonométricas

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4}{\sqrt{(1-x^2)^3}} &= \int \frac{\sin^4 t}{\sqrt{(1-\sin^2 t)^3}} \cos t \, dt \\
&= \int \frac{(1-\cos^2 t)^2}{\cos^2 t} dt \\
&= \int \frac{1-2\cos^2 t+\cos^4 t}{\cos^2 t} dt \\
&= \int \frac{dt}{\cos^2 t} - 2\int dt + \int \cos^2 t \, dt \\
&= \int \frac{dt}{\cos^2 t} - 2\int dt + \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt
\end{aligned}$$

Resolvemos las integrales obtenidas

$$\int \frac{dt}{\cos^2 t} - 2\int dt + \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \tan t - 2t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + \mathrm{C}$$
$$= \tan t + \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{3}{4}t + \mathrm{C}$$

Regresamos a la variable inicial, para ello despejamos t en el cambio de variable inicial

x=$\sin t \quad \Longrightarrow \quad t = \arcsin x$

Calculamos para el seno y el coseno de t

$$\sin 2t = 2\sin t \cdot \cos t = 2\sin(\arcsin x) \cdot \cos(\arcsin x) = 2x \cdot \sqrt{1-x^2}$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - [\sin(\arcsin x)]^2} = \sqrt{1-x^2}$$

Asi el resultado se expresa en la variable x como

$$\int \frac{x^4}{\sqrt{(1-x^2)^2}} dx = \tan(\arcsin x) + \frac{x}{2} \cdot \sqrt{1-x^2} - \frac{3}{2}\arcsin x + \mathrm{C}$$

Ejercicio 2:

$$\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$$

Realizamos el cambio de variable y calculamos su diferencial

$$\tan x = t \quad \Longrightarrow \quad x = arctan\, t$$

$$\mathrm{dx} = \frac{dt}{1+t^2}$$

Sustituimos en la integral y simplificamos

$$\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1+1+t^2}{1+t^2}}$$

$$= \int \frac{dt}{2+t^2}$$

$$= \int \frac{dt}{2\left[1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}dt$$

Resolvemos las integrales obtenidas

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} + \mathrm{C}$$

Regresamos a la variable inicial

$$\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\tan x\right) + \mathrm{C}$$

Ejercicio 3:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\cos x + \cos^2 x}}$$

Se realiza el cambio de variable y se calcula su diferencial

$$\tan\frac{x}{2} = t \quad \Longrightarrow \quad x = 2\ \arctan\ t$$

dx=$\frac{2dt}{1+t^2}$

Sustituimos en la integral y simplificamos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\cos x + \cos^2 x}} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\sqrt{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2}}$$

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\sqrt{\frac{(1-t^2)(1+t^2)+(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}}}$$

$$= 2\int \frac{dt}{\sqrt{2-2t^2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Resolvemos las integrales obtenidas

$$\frac{2}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}\arcsin t + \mathrm{C}$$

Regresamos a la variable inicial

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\cos x + \cos^2 x}} = \sqrt{2}\arcsin\left(\tan\frac{x}{2}\right) + \mathrm{C}$$

Ejercicio 4:

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$$

Se realiza el cambio de variable y se calcula su diferencial

$$\mathrm{x} = \mathrm{t}^6 \implies t = \sqrt[6]{t}$$

$$\mathrm{dx} = 6\mathrm{t}^5 dt$$

Sustituimos en la integral y simplificamos

$$\begin{aligned} \int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx &= \int \frac{1-t^3}{t^2}\cdot 6t^5dt \\ &= 6\int (1-t^3)\cdot t^3dt \\ &= 6\int (t^3-t^6)dt \end{aligned}$$

Resolvemos las integrales obtenidas

$$6\int (t^3-t^6)dt \quad = \quad \frac{3}{2}t^4-\frac{6}{7}t^7+\mathrm{C}$$

Regresamos a la variable inicial

$$\frac{3}{2}t^4-\frac{6}{7}t^7+\mathrm{C}=\frac{3}{2}\sqrt[6]{x^4}-\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}+\mathrm{C}$$

Así, la solución en termino de la variable es

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\cos x+\cos^2 x}}=\frac{3}{2}\sqrt[6]{x^4}-\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}+\mathrm{C}$$

Ejercicio 5:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x}}dx$$

Realizamos el cambio de variable

$$\sqrt[3]{1+2x}=t \quad \Longrightarrow \quad 1+2x=t^3 \quad \Longrightarrow \quad x=\frac{t^3-1}{2}$$

Calculamos la diferencial

$$2\ \mathrm{dx}=3\mathrm{t}^2\,dt \quad \Longrightarrow \quad dx=\frac{3t^2\,dt}{2}$$

Sustituimos en la integral y simplificamos el integrando

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x}}dx &= \int \frac{\left(\frac{t^3-1}{2}\right)^2}{t} \cdot \frac{3t^2}{2}dt \\
&= \frac{3}{2}\int \left(\frac{t^6-2t^3+1}{4}\right) \cdot t\, dt \\
&= \frac{3}{8}\int (t^7-2t^4+t)\, dt
\end{aligned}$$

Resolvemos la nueva integral

$$\frac{3}{8}\int (t^7-2t^4+t)\, dt \;=\; \frac{3}{8}\left(\frac{t^8}{8}-\frac{2t^5}{5}+\frac{t^2}{2}\right)+\mathrm{C}$$

Regresamos a la variable inicial, para ello empleamos $t=\sqrt[3]{1+2x}$

$$\frac{3}{8}\left(\frac{t^8}{8}-\frac{2t^5}{5}+\frac{t^2}{2}\right)+\mathrm{C} = \frac{3}{64}\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^8-\frac{3}{20}\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^5+\frac{3}{16}\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^2+$$
C

Así la solución buscada es

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x}}dx = \frac{3}{64}\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^8-\frac{3}{20}\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^5+\frac{3}{16}\left(\sqrt[3]{1+2x}\right)^2+\mathrm{C}$$

Ejercicios a resolver

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx$$