

Логарифмдік теңсіздіктер

$$1) \frac{1}{1+\lg x} + \frac{1}{1-\lg x} > 2$$

$$\lg x = t$$

$$\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} - \frac{2}{1} > 0$$

$$\frac{1+t+1-t-2(1+t)(1-t)}{(1+t)(1-t)} > 0$$

$$\frac{2-2(1-t^2)}{(1+t)(1-t)} > 0$$

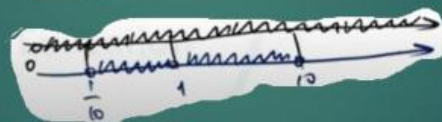
$$\frac{2-2+2t^2}{(1+t)(1-t)} > 0$$

$$2t^2 = 0 \quad 1+t \neq 0 \quad 1-t \neq 0$$

$$t = 0 \quad t \neq -1 \quad t \neq 1$$

$$-1 < \lg x < 0 \quad 0 < \lg x < 1$$

$$\frac{1}{10} < x < 1 \quad 1 < x < 10$$



$$\left(\frac{1}{10}; 1\right) \cup (1; 10)$$

4-мысал. $\log_3(7-x) \leq \frac{9}{16} \log_{\sqrt[3]{2}} \frac{1}{4} + \log_{7-x} 9$ теңсіздігін шешу керек.

$$\blacktriangle \text{ ММЖ: } \begin{cases} 7-x > 0, \\ 7-x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 7, \\ x \neq 6. \end{cases}$$

Осыдан ММЖ: $x \in (-\infty; 6) \cup (6; 7)$.

$$\log_{\sqrt[3]{2}} \frac{1}{4} = \left(-\frac{4}{3} \log_2 2 \right)^2 = \frac{16}{9} \quad \text{және} \quad \log_{7-x} 9 = 2 \cdot \log_{7-x} 3 = \frac{2}{\log_3(7-x)}$$

екенін ескерсек, берілген теңсіздік былай жазылады:

$$\log_3(7-x) \leq 1 + \frac{2}{\log_3(7-x)}.$$

$\log_3(7-x) = y$ белгілеуін енгізсек,

$$y \leq 1 + \frac{2}{y} \Leftrightarrow \frac{(y+1)(y-2)}{y} \leq 0 \Rightarrow y \in (-\infty; -1] \cup (0; 2].$$

x айнымалысы үшін мына теңсіздіктер жиынтығы шығады:

$$\begin{cases} \log_3(7-x) \leq -1, \\ 0 < \log_3(7-x) \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7-x \leq \frac{1}{3}, \\ 1 < 7-x \leq 9 \end{cases} \Rightarrow x \in [-2; 6) \cup \left[\frac{20}{3}; +\infty \right).$$

Мұнда $3 > 1$ болатыны ескерілген. Табылған шешімді ММЖ-мен

қиылыстырып, есептің жауабын аламыз: $x \in [-2; 6) \cup \left[\frac{20}{3}; 7 \right)$. ■