

1

포물선

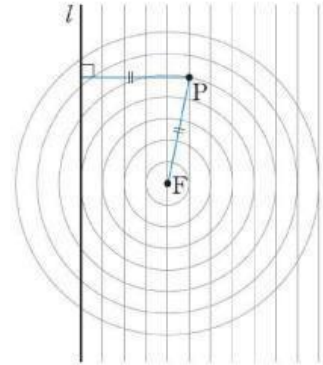
● 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다.

포물선이란 무엇일까

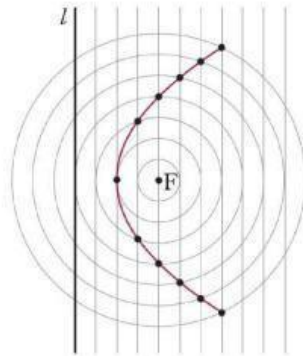
생각 **특**

오른쪽 그림과 같이 점 F 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 각각 1, 2, 3, ..., 7인 원, 반지름의 길이가 4인 원에 접하는 직선 l , 직선 l 과 평행하고 간격이 1인 직선이 있다. 이때 점 P 에서 점 F 에 이르는 거리와 직선 l 에 이르는 거리는 각각 5로 서로 같다.

탐구 * 원과 직선의 교점 중에서 점 F 와 직선 l 에 이르는 거리가 각각 2, 3, ..., 7로 같은 점들을 모두 찾아 표시해 보자.

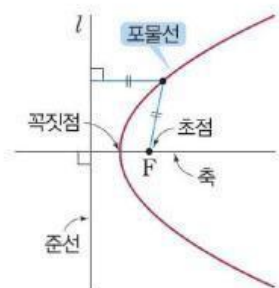


위의 **생각 특**에서 원과 직선의 교점 중 점 F 와 직선 l 에 이르는 거리가 각각 같은 점들을 매끄러운 곡선으로 연결하면 다음 그림과 같은 모양이 된다.



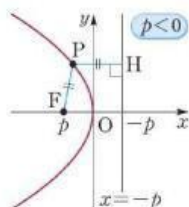
이와 같이 평면 위의 한 점 F 와 이 점을 지나지 않는 한 직선 l 이 주어질 때, 점 F 와 직선 l 에 이르는 거리가 각각 같은 점들의 집합을 **포물선**이라 하고, 점 F 를 포물선의 **초점**, 직선 l 을 포물선의 **준선**이라고 한다.

이때 포물선의 초점 F 를 지나고 준선 l 에 수직인 직선을 포물선의 **축**, 포물선과 축의 교점을 포물선의 **꼭짓점**이라고 한다.



포물선의 방정식은 어떻게 구할까

좌표평면에서 점 $F(p, 0)$ ($p \neq 0$)을 초점으로 하고 직선 $x = -p$ 를 준선으로 하는 포물선의 방정식을 구해 보자.



포물선 위의 점 $P(x, y)$ 에서 준선 $x = -p$ 에 내린 수선의 발을 H 라고 하면 $H(-p, y)$ 이다.

포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PF} = \overline{PH}$$

이므로

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x+p|$$

이다. 이 식의 양변을 제곱하여 정리하면 다음과 같다.

$$y^2 = 4px \quad \dots\dots ①$$

역으로 점 $P(x, y)$ 가 방정식 ①을 만족시키면

$$\begin{aligned} \overline{PF} &= \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = \sqrt{(x-p)^2 + 4px} \\ &= \sqrt{(x+p)^2} = |x+p| \\ &= \overline{PH} \end{aligned}$$

이므로 점 P 는 초점이 점 $F(p, 0)$ 이고 준선의 방정식이 $x = -p$ 인 포물선 위에 있다.

따라서 방정식 ①은 구하는 포물선의 방정식이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

포물선 $y^2 = 4px$ 의 꼭짓점은 원점이고, 축의 방정식은 $y = 0$ 이다.

포물선의 방정식 (1)

초점이 점 $F(p, 0)$ 이고 준선의 방정식이 $x = -p$ 인 포물선의 방정식은

$$y^2 = 4px \quad (\text{단, } p \neq 0)$$

보기 초점이 점 $F(-1, 0)$ 이고 준선의 방정식이 $x = 1$ 인 포물선의 방정식은

$$y^2 = -4x$$

문제 1

다음 포물선의 방정식을 구하시오.

(1) 초점이 점 $F(3, 0)$ 이고 준선의 방정식이 $x = -3$ 인 포물선

(2) 초점이 점 $F(-\frac{1}{2}, 0)$ 이고 준선의 방정식이 $x = \frac{1}{2}$ 인 포물선

예제 1

포물선 $y^2 = 8x$ 의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하고 그래프를 그리시오.

풀이 초점의 좌표를 $(p, 0)$ 이라고 하면

$$y^2 = 8x = 4 \times 2x$$

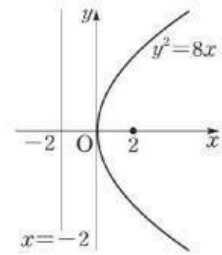
$$\text{이므로 } p = 2$$

따라서

$$\text{초점의 좌표는 } (2, 0)$$

$$\text{준선의 방정식은 } x = -2$$

또 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



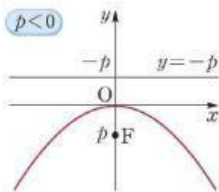
답 풀이 참조

문제 2

다음 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하고 그래프를 그리시오.

(1) $y^2 = x$

(2) $y^2 = -12x$



포물선 $x^2 = 4py$ 의 꼭짓점은 원점이고, 축의 방정식은 $x = 0$ 이다.

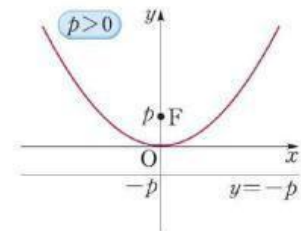
$x^2 = 4py$ 에서 $y = \frac{1}{4p}x^2$ 이므로 포물선 $x^2 = 4py$ 는 이차함수 $y = \frac{1}{4p}x^2$ 의 그래프와 같다.

좌표평면에서 점 $F(0, p)$ ($p \neq 0$)를 초점으로 하고 직선 $y = -p$ 를 준선으로 하는 포물선의 방정식을 앞에서와 같은 방법으로 구하면

$$x^2 = 4py$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.



② 포물선의 방정식 (2)

초점이 점 $F(0, p)$ 이고 준선의 방정식이 $y = -p$ 인 포물선의 방정식은

$$x^2 = 4py \quad (\text{단, } p \neq 0)$$

문제 3

다음 포물선의 방정식을 구하시오.

(1) 초점이 점 $F(0, 5)$ 이고 준선의 방정식이 $y = -5$ 인 포물선

(2) 초점이 점 $F(0, -1)$ 이고 준선의 방정식이 $y = 1$ 인 포물선