

Grafik Fungsi Rasional

1. Fungsi Rasional Linier

Definisi: *Bilangan rasional* adalah bilangan yang dapat di bentuk $\frac{a}{b}$; $b \neq 0$; $a, b \in \mathbb{Z}$. Sedangkan fungsi rasional linier adalah fungsi yang memetakan setiap bilangan riil x pada fungsi yang dirumuskan dengan

$$f : x \rightarrow y = f(x) = \frac{ax+b}{px+q}; \text{ dimana } x \neq -\frac{q}{p}$$

Untuk melukis grafik fungsi rasional linier diperlukan langkah-langkah sebagai berikut:

- a) Titik potong dengan sumbu x

$$y=0 \rightarrow ax+b=0$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Koordinat titik potong adalah $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$

- b) Titik potong dengan sumbu y

$$x=0 \rightarrow y = \frac{b}{q}$$

Koordinat titik potong adalah $\left(0, \frac{b}{q}\right)$

- c) Asimtot Datar

Asimtot adalah garis lurus yang makin didekati oleh grafik fungsi bahkan sampai berhimpit dengan grafik tersebut untuk nilai x atau y tak hingga tetapi tidak sampai memotong garis tersebut. Untuk beberapa kasus, asimtot mungkin dipotong oleh grafik pada x atau y berhingga, tetapi akan berhimpit untuk x atau y tak hingga.

$$x \rightarrow \infty \text{ maka } y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax+b}{px+q} = \frac{a}{p}$$

- d) Asimtot Tegak

$$y \rightarrow \infty \text{ maka } px + q \rightarrow 0$$

$$\therefore px + q = 0$$

$$x = -\frac{q}{p}$$

e) Titik bantu pada sumbu x

x	$-n$	$\dots$	0	$\dots$	n
y					

Contoh 1:

Lukislah grafik fungsi $y = \frac{2x-5}{x-1}$

Penyelesaian:

Langkah-langkah melukis grafik fungsi rasional adalah sbb:

1. Titik potong pada sumbu x

$$y = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{a} = -\frac{-5}{2} = \frac{5}{2} \quad \left(\frac{5}{2}, 0\right)$$

2. Titik potong pada sumbu y

$$x=0 \rightarrow y = \frac{-5}{-1} = 5 \quad (0, 5)$$

3. Asimtot datar

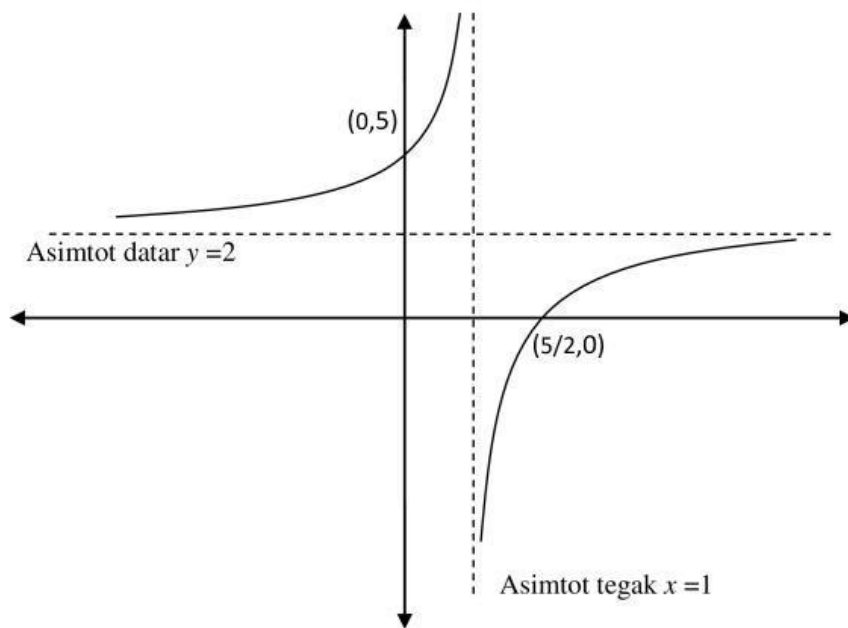
$$x \rightarrow \infty \text{ maka } y = \frac{a}{p} = \frac{2}{1} = 2$$

4. Asimtot tegak

$$y = \infty \text{ maka } x = -\frac{q}{p} = -\frac{-1}{1} = 1$$

5. Titik Bantu

x	-3	-2	-1	2	3	4
y	2,75	3	3,5	-1	0,5	1



2. Fungsi Rasional dengan Bentuk

$$f : x \rightarrow y = f(x) = \frac{ax+b}{px^2+qx+r}; \text{ dimana } a, p, \text{ dan } px^2+qx+r \neq 0;$$

$ax+b$ bukan faktor dari px^2+qx+r

Untuk melukis grafik fungsi rasional dengan bentuk di atas diperlukan langkah-langkah sebagai berikut:

- a) Titik potong dengan sumbu x
 $y=0 \rightarrow ax+b=0$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Koordinat titik potong adalah $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$

- b) Titik potong dengan sumbu y

$$x=0 \rightarrow y = \frac{b}{r}$$

Koordinat titik potong adalah $\left(0, \frac{b}{r}\right)$

- c) Asimtot Datar

$$x \rightarrow \infty \text{ maka } y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax+b}{px^2+qx+r} = \frac{0}{p} = 0$$

d) Asimtot Tegak

$$y \rightarrow \infty \text{ maka } px^2 + qx + r \rightarrow 0$$

$$px^2 + qx + r = 0$$

$\therefore$ Asimtot tegak diperoleh dari faktor $px^2 + qx + r = 0$

e) Nilai Ekstrim

Nilai ekstrim y diperoleh jika x riil. Agar nilai x riil maka

$$D \geq 0$$

$$y = \frac{ax + b}{px^2 + qx + r}$$

$$ypx^2 + yqx + yr = ax + b$$

$$ypx^2 + (yq - a)x + (yr - b) = 0$$

karena syarat $D \geq 0$ maka

$$(yq - a)^2 - 4 \cdot yp \cdot (yr - b) \geq 0$$

f) Titik bantu pada sumbu x

x	$-n$	$\dots$	0	$\dots$	n
y					

Contoh 2:

Lukislah grafik fungsi $y = \frac{x-1}{2x^2+x-1}$

Penyelesaian:

Langkah-langkah melukis grafik fungsi rasional adalah sbb:

1. Titik potong pada sumbu x

$$y = 0 \rightarrow x = -\frac{b}{a} = -\frac{-1}{1} = 1 \quad (1,0)$$

2. Titik potong pada sumbu y

$$x=0 \rightarrow y = \frac{b}{r} = \frac{-1}{-1} = 1 \quad (0,1)$$

3. Asimtot datar

$$x \rightarrow \infty \text{ maka } y = \frac{a}{p} = \frac{0}{2} = 0$$

4. Asimtot tegak

$$y = \infty \text{ maka } px^2 + qx + 0$$

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

$$(2x-1)(x+1) = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \cup x = -1$$

Jadi, asimtot tegak pada

$$x = \frac{1}{2} \text{ dan } x = -1$$

5. Nilai ekstrim

$$y = \frac{x-1}{2x^2+x-1}$$

$$2yx^2 + yx - y = x - 1$$

$$2yx^2 + (y-1)x + (-y+1) = 0$$

$$D \geq 0$$

$$(y-1)^2 - 4(2y)(-y+1) \geq 0$$

$$9y^2 - 10y + 1 \geq 0$$

$$(9y-1)(y-1) \geq 0$$

$$y = 1/9 \cup y = 1$$

$$\text{untuk } y = 1 \rightarrow 1 = \frac{x-1}{2x^2+x-1}$$

$$2x^2 + x - 1 = x - 1$$

$$x = 0 \quad (0,1)$$

$$\text{untuk } y = 1/9 \rightarrow 1/9 = \frac{x-1}{2x^2+x-1}$$

$$2x^2 + x - 1 = 9x - 9$$

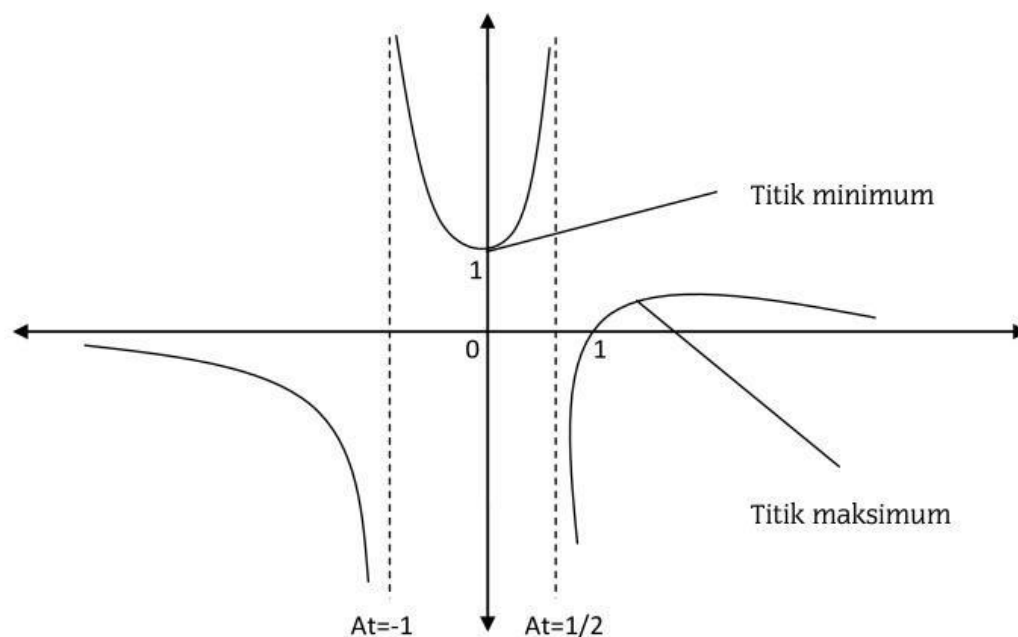
$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x-2)(x-2) = 0$$

$$x = 2 \quad (2, 1/9)$$

6. Titik Bantu

x	-2	-1,5	-1/2	1/4	3/4	2	3
y	-3/5	-5/4	3/2	6/5	-2/7	1/9	1/10



3. Fungsi Rasional dengan bentuk

$$f: x \rightarrow y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}; \text{ dimana } a, p, \text{ dan } px^2 + qx + r \neq 0;$$

Untuk melukis grafik fungsi rasional dengan bentuk di atas diperlukan langkah-langkah sebagai berikut:

a) Titik potong dengan sumbu x

$$y = 0 \rightarrow ax^2 + bx + c = 0$$

Nilai x didapat dari faktor $ax^2 + bx + c = 0$

Koordinat titik potong adalah $(x_1, 0)$ dan $(x_2, 0)$

b) Titik potong dengan sumbu y

$$x = 0 \rightarrow y = \frac{c}{r}$$

Koordinat titik potong adalah $\left(0, \frac{c}{r}\right)$

c) Asimtot Datar

$$x \rightarrow \infty \text{ maka } y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r} = \frac{a}{p}$$

d) Asimtot Tegak

$$y \rightarrow \infty \text{ maka } px^2 + qx + r \rightarrow 0$$

$$px^2 + qx + r = 0$$

$\therefore$ Asimtot tegak diperoleh dari faktor $px^2 + qx + r = 0$

e) Nilai Ekstrim

Nilai ekstrim y diperoleh jika x riil. Agar nilai x riil maka

$$D \geq 0$$

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$$

$$ypx^2 + yqx + yr = ax^2 + bx + c$$

$$(yp - a)x^2 + (yq - b)x + (yr - c) = 0$$

karena syarat $D \geq 0$ maka

$$(yq - b)^2 - 4.(yp - a).(yr - c) \geq 0$$

f) Titik bantu pada sumbu x

x	$-n$	$\dots$	0	$\dots$	n
y					

LATIHAN:

1. Lukislah grafik fungsi rasional $y = \frac{x+4}{x-2}$

2. Lukislah grafik fungsi rasional $y = \frac{3x-1}{3-x}$

3. Tentukan persamaan fungsi rasional jika diketahui asimtot tegak $x = 1$, asimtot datar $y = 0$, dan titik potong pada sumbu $y(0, -2)$.
4. Tentukan persamaan fungsi rasional jika diketahui asimtot datar $y = 3$, asimtot tegak $x = -2$, titik potong pada sumbu $y(0, -1)$ dan melalui titik $(1, 0)$.

5. Lukislah grafik fungsi rasional $y = \frac{x-1}{2x^2+x-1}$

6. Lukislah grafik fungsi rasional $y = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2}$

Catatan: