

LEMBAR KERJA PESERTA DIDIK

Nama :.....

A. Permutasi



Ayo Bereksplorasi

Kelas XIA SMA Tunas Bangsa memilih pengurus kelas pada tahun ajaran baru. Pengurus kelasnya terdiri atas ketua, wakil ketua, sekretaris, dan bendahara. Contoh susunan pengurus kelasnya tampak disajikan seperti pada Gambar 1 berikut.



Gambar 1 Struktur Pengurus Kelas

Pada kelas XIA terdapat 8 siswa yang bersedia menjadi pengurus kelas. Berdasarkan gambar 1 di atas diketahui bahwa terdapat posisi pengurus yang belum terisi yaitu ketua kelas, wakil ketua kelas, sekretaris, dan bendahara. Apabila yang terpilih menjadi ketua kelas dan wakil ketua kelas adalah Roni dan Andi, maka berapa banyak cara yang mungkin dalam menyusun susunan pengurus yang belum terisi?

Coba Perhatikan!

Banyak cara yang mungkin untuk mengisi susunan pengurus yang belum terisi dapat ditunjukkan sebagai berikut. Terdapat 8 siswa yang bersedia, dan terdapat 2 siswa yang sudah mengisi susunan pengurus, yaitu Roni dan Andi, sehingga tersisa 6 siswa yang mungkin mengisi 2 susunan pengurus lain yang belum terisi.

Susunan Pengurus	Bendahara	Sekretaris
Banyak Cara	6	5

Jadi, banyak cara yang mungkin untuk membuat susunan pengurus adalah $6 \times 5 = 30$ cara.

$$6 \times 5 = \frac{6 \times 5 \times (4 \times 3 \times 2 \times 1)}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{6!}{4!} = \frac{6!}{(6-2)!}$$

Hasil terakhir perhitungan, dapat dinotasikan sebagai berikut.

$$\frac{6!}{(6-2)!} = P(6, 2)$$

Berdasarkan perhitungan tersebut kita dapat mengetahui bahwa susunan pengurus kelas yang belum terisi adalah sekretaris dan bendahara yang dapat diisi oleh 6 siswa yang bersedia. Dengan demikian, secara matematis hal ini telah tersusun dan dibaca *permutasi 2 dari 6 objek* yang dinotasikan dengan $P(6,2)$.

Permutasi r item dari n objek umumnya adalah jumlah konfigurasi potensial dari r objek yang diambil dari n objek, di mana $r \leq n$ tidak ditampilkan secara matematis dalam setiap kemungkinan susunan r objek: Elemen permutasi r yang berbeda dari n adalah:

$${}_nP_r = P(n, r) = P_r^n = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$$

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Keterangan:

${}_nP_r$ dibaca Permutasi r objek dari n objek.

$n!$ Dibaca n faktorial

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$$

Tahukah Kalian

$$1! = 1$$

$$0! = 1$$

Berikut beberapa permutasi khusus.

1. Permutasi n item dari n objek

Permutasi n item dari n objek yang disediakan dapat ditulis menjadi sebagai berikut.

$$\begin{aligned} {}_nP_n &= \frac{n!}{(n-n)!} \\ &= \frac{n!}{0!} \\ &= \frac{n!}{1} \end{aligned}$$

Link Video Pembelajaran :

<https://drive.google.com/file/d/13aco-68LzDZxhXDCeH5UkC1EUfyCVJHL/view?usp=drivesdk>

Contoh Soal 1

1. Permainan tradisional galasin (gobak sodor) terdiri atas 6 orang. Banyaknya cara untuk menyusun formasi yang terdiri atas 6 orang tersebut adalah

Alternatif penyelesaian:

Diketahui 6 pemain galasin. Maka banyak cara menyusun formasi yang terdiri atas 6 orang adalah $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ cara.

2. Ani, Ina, Ita, dan Onik merupakan sahabat sejati yang selalu kompak dalam beraktivitas dan pergi jalan-jalan bersama. Pada hari Minggu, mereka akan menonton film di bioskop. Karena mereka terlambat memesan tiket, hanya tersisa 4 kursi yang tersedia secara berdekatan. Ada berapa cara formasi susunan yang teratur yang dapat mereka gunakan?

Alternatif penyelesaian:

Karena ada 4 orang yang menempati 5 kursi bioskop, maka ada 4! cara atau cara

Sehingga $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ cara

$$\text{atau } P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \dots \Rightarrow P_4^4 = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4!}{0!} = \frac{4!}{1} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{ cara}$$

Jadi, banyak cara 4 orang remaja menempati tempat duduknya ada 24 cara

2. Permutasi dengan objek yang sama

Jika ada objek yang sama di antara objek yang diatur, prinsip-prinsip berikut dapat menentukan jumlah formasi susunan:

$${}_nP_{r_1, r_2, \dots, r_k} = \frac{n!}{r_1! \times r_2! \times \dots \times r_k!}$$

Keterangan: r_k = banyak objek ke-k

Link video pembelajaran :

<https://drive.google.com/file/d/1oSIPaAhR2rMfYUBSggh2EOdQoiwQYx8/view?usp=drivesdk>

Contoh Soal 2

1. Dalam huruf PALAPA, huruf P terdapat 2 huruf, huruf A terdapat 3 huruf, dan huruf L terdapat 1 huruf. Banyaknya susunan huruf yang berbeda dengan susunan dari huruf P, A, L, P, L, P, dan A adalah

$$P_{2,3}^6 = \frac{6!}{2! \times 3!} = 60 \text{ susunan huruf}$$

2. Tentukan banyak susunan sepuluh huruf dari huruf KALIMANTAN!

Alternatif penyelesaian:

Banyaknya susunan 10 huruf yang diambil dari huruf KALIMANTAN, permasalahan ini merupakan permasalahan permutasi berulang

Misalkan q_1 = munculnya huruf A, yaitu $q_1 = 3$

q_1 = munculnya huruf N, yaitu $q_1 = 2$

$$\begin{aligned}\text{sehingga } P &= \frac{n!}{q_1!q_2!\dots q_k!} \Rightarrow P = \frac{10!}{q_1!q_2!} \\ &\Rightarrow P = \frac{10!}{3!2!} \\ &\Rightarrow P = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \\ &\Rightarrow P = 5.040\end{aligned}$$

Jadi, banyaknya susunan huruf KALIMANTAN adalah ada 5.040 cara.

3. Permutasi siklis

Jika 3 orang Abdul (a), Bayu (b), dan Charli (c) duduk berjajar, maka posisi duduk adalah abc, acb, bca, bac, cab, cba. Tetapi jika orang tersebut duduk mengelilingi meja bundar, maka posisi abc, bca, dan cab adalah sama. Juga posisi acb, cba, dan bac sama. Dengan demikian tiga orang a, b, c yang duduk melingkar hanya ada 2 posisi duduk, yaitu abc dan acb. Masalah seperti ini disebut Permutasi Siklis.



Berdasarkan gambar tiga orang yang duduk di meja bundar, dapat ditunjukkan bahwa

- Banyak permutasi dari 3 objek yang berbeda adalah 3
- Ada tiga jenis permutasi siklis yang sama
- Sehingga banyak susunan 3 objek berbeda dalam permutasi siklis adalah $\frac{3!}{3} = \frac{3 \times 2 \times 1}{3} = 2! = (3 - 1)!$

Secara umum, dapat ditentukan bahwa

- Banyak permutasi dari n objek yang berbeda adalah $n!$
- Ada n jenis permutasi siklis yang sama
- Sehingga banyak susunan n objek berbeda dalam permutasi siklis adalah $\frac{n!}{n} = \frac{1 \times 2 \times 3 \dots \times (n-1) \times n}{n} = (n-1)!$

Apabila n objek disusun secara melingkar (siklis), maka banyak susunan objek dapat ditentukan dengan aturan: $P_n = (n - 1)!$

Link Video Pembelajaran :

<https://drive.google.com/file/d/1An1C7-RugOkM-EZC81x5bHF1PuEpd-VN/view?usp=drivesdk>

Contoh Soal 3

1. Terdapat lima siswa yang melakukan diskusi dengan duduk secara melingkar. Banyak susunan yang bisa dibentuk dari lima siswa tersebut adalah $P_5 = (5 - 1)! = 4! = 24$ susunan.
2. Terdapat lima siswa dan tiga siswi duduk mengelilingi suatu meja bundar, tentukan banyaknya cara duduk jika a. Duduk bebas b. Tidak ada siswi duduk berdampingan

Alternatif penyelesaian:

Diketahui:

1. Terdapat lima siswa dan tiga siswi duduk mengelilingi meja bundar, permasalahan ini termasuk permutasi siklis

$$\begin{aligned}P_{siklis}^n &= \frac{n!}{n} = (n - 1) \\P_{siklis}^8 &= (8 - 1) \\&= 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\&= 5.040\end{aligned}$$

Jadi, banyak cara duduk apabila duduknya bebas adalah ada sebanyak 5.040 cara.

2. Setelah siswa duduk, siswi mempunyai pilihan sebanyak lima posisi. Gambar di bawah, Kursi dekat meja menunjukkan kemungkinan posisi yang sudah ditempati siswa.



Jika kursi dekat meja menunjukkan kursi yang dapat ditempati oleh siswa, sedangkan kursi lain akan ditempati oleh siswi dengan mengisi posisi di antara kursi yang diduduki siswa. Karena dua siswi tidak boleh duduk berdampingan, maka siswi kedua mempunyai empat pilihan dan siswi ketiga mempunyai tiga pilihan.

sehingga $4! \times 5 \times 4 \times 3 = 4! \times 60 = 24 \times 60 = 1440$ Jadi, banyak cara duduk apabila tidak ada siswi yang duduknya berdampingan adalah sebanyak 1.440 cara.

LATIHAN

SOAL 1

a. ${}_6P_2 = \dots$

b. ${}_8C_3 = \dots$

SOAL 2

Sebuah restoran memiliki 8 juru masak. Dari 8 orang tersebut, 3 orang telah dialokasikan untuk membuat gulai, rendang, dan rawon secara acak. Tentukan berapa banyak cara juru masak dipilih.

SOAL 3

Ada tujuh orang siswa akan membentuk garis lurus. Tentukan banyaknya susunan barisan yang mungkin terjadi

SOAL 4

Slogan Bhinneka Tunggal Ika ada pada Garuda Pancasila yang menjadi lambang negara Indonesia. Simbolnya adalah burung dengan kepala Garuda.
Tentukan susunan 6 huruf dari huruf "GARUDA"