

MATERI:

Barisan, Deret

dan

Induksi Matematika



SK: Menggunakan konsep barisan dan deret dalam pemecahan masalah



KD : Menentukan Suku ke- n barisan dan jumlah n suku deret aritmatika dan geometri



Indikator:



1. Menjelaskan arti baris dan deret



2. Menemukan rumus barisan dan deret aritmatika



3. Menemukan rumus barisan dan deret geometri



4. Menentukan Suku ke- n barisan dan jumlah n suku deret aritmatika dan geometri

Assalamu'alaikum.....

Alhamdulillahirabbil'alamin, tiada kata lain yang patut untuk kami ungkapkan selain ucapan syukur kepada Allah SWT yang telah memberikan kekuatan, kesehatan dan kemampuan kepada kami sehingga tugas LKS (lembar kerja siswa) ini dapat selesai dengan baik dan tepat pada waktunya.

Shalawat dan salam semoga selalu dilimpahkan kepada baginda Muhammad SAW., para sahabat dan seluruh keluarga beliau serta para pengikut beliau hingga akhir zaman.

Selama penyusunan LKS ini, penulis telah mendapat bantuan dari berbagai pihak, terutama dari Ibu Fenny Anggreni.S.pdi selaku dosen pengasuh mata kuliah Workshop Matematika. Serta ucapan terima kasih juga penulis persembahkan kepada semua pihak yang baik secara langsung ataupun tidak langsung ikut terlibat dalam penyelesaian makalah ini.

Akhirnya, mohon maaf apabila terdapat kesalahan dan kekhilafan. kami mohon saran dan kritik yang sifatnya membangun guna lebih menyempurnakan makalah-makalah kami selanjutnya.

Langsa, 14 Maret 2012

Yusridha

1. Barisan dan Deret Aritmatika

Masih ingatkah pola bilangan genap yang dimulai dari 2?

Pola bilangan genap : 2, 4, 6, 8, ...

Suku ke-1 (U_1) = 2.

Suku ke-2 (U_2) = ...

Suku ke-3 (U_3) = ...

Suku ke-4 (U_4) = ...

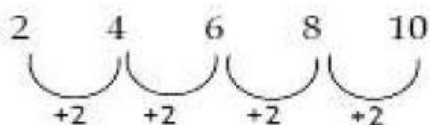
Berapakah suku ke-5?



Aturan pada barisan bilangan genap itu adalah:

dimulai dengan 2 dan suku berikutnya diperoleh dengan menambahkan 2 pada suku sebelumnya.

Dengan demikian suku kelima adalah 10 atau $U_5 = 10$.



Perhatikan barisan 2, 5, 8, 11, ...

Tulislah aturan untuk menjelaskan barisan bilangan di atas dan tentukan tiga suku berikutnya...



Barisan bilangan yang suku berikutnya didapat dari penambahan suku sebelumnya dengan bilangan yang tetap.

Bilangan yang tetap itu dinamakan **pembeda**. Barisan di atas merupakan contoh barisan aritmatika dengan pembeda 3.

Jadi kesimpulannya Barisan Aritmatika adalah: ...



Bentuk Umum Barisan Aritmatika:

$$a, a+b, a+2b, a+3b, \dots, a+(n-1)b$$

Keterangan : Suku pertama: a / U_1

Beda : $b = U_2 - U_1$

Banyaknya suku : n

Suku ke n : U_n



Rumus suku ke- n :

$$U_n = a + (n - 1) b$$

atau

$$U_n = S_n - S_{n-1}$$

pada deret Aritmatika, Jumlah n suku pertama deret Aritmatika dinyatakan dengan S_n , yaitu:



$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$$

Rumus jumlah n suku pertama deret Aritmatika:

$$S_n = \frac{1}{2} n (a + U_n)$$

$$U_n = a + (n-1) b$$

Rumus umum $S_n = \frac{1}{2} n (a + U_n)$ juga dapat ditulis dengan:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} n (a + U_n) \\ &= \frac{1}{2} n (a + a + (n-1) b) \\ &= \frac{1}{2} n (\dots + (\dots - \dots) b) \\ &= \frac{n}{2} (\dots + (\dots - \dots) \dots) \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{n}{2} (\dots + (\dots - \dots) \dots)$$

“Otak Anda adalah
ibarat raksasa tidur.”
(Tony Buzan, *Use Your
Head*)



Soal:

1. Tentukan beda pada barisan aritmetika berikut; 3, 5, 7, 9....

Jawab:

$$U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = \dots = U_n - U_{n-1} = \text{konstanta}$$

Untuk barisan 3, 5, 7, 9....

$$\dots - 3 = \dots - \dots = \dots - \dots = \dots = \dots$$

Jadi bedanya adalah ...

2. Carilah suku yang diminta pada barisan berikut ini!

- a. Suku ke-11 dari barisan 7, 10, 13, 16....

$$\text{Dik : } a = 7$$

$$b = 10 - 7 = 3$$

$$n = 11$$

dit : $U_{11} = \dots\dots\dots?$

Jawab : $U_{11} = a + (n-b) b$
 $= \dots + (\dots - \dots) \dots$
 $= \dots + \dots$
 $= \dots$

3. Suatu deret aritmatika diketahui 5 deret suku pertama = 35 dan jumlah 4 suku yang pertama = 24. Suku yang ke-15 sama dengan

Jawab:

$$S_5 = 35 \Leftrightarrow \frac{5}{2}(2a + 4b) \Leftrightarrow 5a + 10b \quad | \times 4 | \dots = \dots a + \dots b$$

$$S_4 = 24 \Leftrightarrow 2(2a + 3b) \Leftrightarrow 4a + 6b \quad | \times 5 | \underline{\dots = \dots a + \dots b}$$

$$\dots = \dots b$$

$$b = \dots, a = \dots$$

$$U_{15} = a + 14b$$

$$U_{15} = \dots + \dots = \dots$$

4. Jumlah ke-10 dari barisan : 3, 5, 7, 9,adalah

Jawab:

$$a = \dots, b = \dots$$

$$U_{10} = (a + 9b)$$

$$U_{10} = \dots + \dots = \dots$$

5. Jumlah suku pertama dari deret aritmatika dinyatakan dengan $S_n = n^2 + 2n$, beda dari deret itu adalah

Jawab:

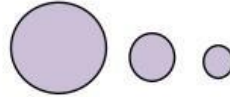
$$S_n = n^2 + 2n \quad \curvearrowright \quad \text{Turunkan, jumlah koefisien harus sama}$$

$$U_n = \dots$$

$$\text{beda} = \dots$$



LATIHAN MANDIRI 1



1. Suku ke-11 barisan 7, 11, 15, ... adalah ...

Jawab:

2. Suku ke-12 barisan 12, 36, 108, ...

Jawab:

3. Suatu deret aritmatika mempunyai suku ke-2 = 25 dan suku ke-6 = 49. Jumlah 12 suku pertama adalah ...

Jawab:

4. Jika $13+18+23+...+x=244$, maka nilai x yang memenuhi sama dengan ...

Jawab:

5. Rumus jumlah n suku pertama deret aritmatika adalah $S_n = 6n^2 + 4n$. Beda deret tersebut sama dengan

Jawab:

2. Barisan dan Deret Geometri

Perhatikan barisan -4, 8, -16, 32, ... , ...

Apakah barisan itu barisan aritmatika atau geometri?

Jelaskan! _____



Coba perhatikan barisan bilangan berikut !!!

1	2	4	8	16	32	
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	
Suku ke-1 $\rightarrow U_1 = 1 = 2^0$	$\frac{U_2}{U_1} = \frac{2}{1} = \frac{2^1}{2^0} = 2$					
Suku ke-2 $\rightarrow U_2 = 2 = 2^1$						
Suku ke-3 $\rightarrow U_3 = 4 = 2^2$	$\frac{U_3}{U_2} = \frac{4}{2} = \frac{2^2}{2^1} = 2$					
Suku ke-4 $\rightarrow U_4 = 8 = 2^3$						

Kesimpulan Apa yang kalian Peroleh? Jelaskan!

Barisan Geometri diperoleh dengan mengalikan bilangan tertentu (rasio) ke bilangan sebelumnya untuk memperoleh suku selanjutnya.

Rumus suku ke n barisan dan deret geometri:

$$U_n = ar^{n-1}$$

atau

$$U_n = S_n - S_{n-1}$$

Keterangan : Suku pertama: a / U_1

$$\text{Rasio : } r = \frac{U_n}{U_{n-1}}$$

Suku ke n : U_n

Deret Geometri adalah penjumlahan dari masing-masing suku dari suatu barisan geometri

pada deret Geometri, Jumlah n suku pertama deret Geometri dinyatakan dengan S_n , yaitu:

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$$



Rumus jumlah n suku pertama deret Aritmatika:

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, r \neq 1, r < 1$$

atau

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}, r \neq 1, r > 1$$

Pembuktian Rumusnya:

$$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \dots + U_n$$

$$= a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} \dots\dots\dots (1)$$

Dari persamaan (1) semua suku dikalikan dengan r

$$rS_n = r(U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \dots + U_n)$$

$$= r(a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1})$$

$$= ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots + ar^n \dots\dots\dots (2)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh:

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1}$$

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots + ar^n$$

$$S_n - rS_n = a + (-ar^n)$$

$$(1-r)S_n = a - ar^n$$



Terbukti bahwa: $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

dalam deret geometri kita juga mengenal deret geometri tak berhingga dengan rumus:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-r}, \text{ untuk } -1 < r < 1, r \neq 1$$

Soal:

1. Jumlah deret geometri $5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \frac{5}{8} + \dots$

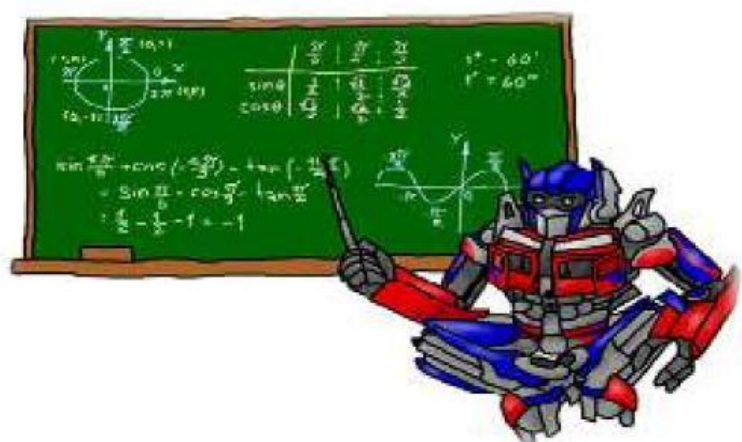
Jawab:

$$r = \frac{U_n}{U_{n-1}} = \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-r}$$

$$= \frac{\dots}{1 - \dots}$$

$$= \dots$$



2. Dari suatu deret geometri yang rasionya 2 diketahui jumlah 10 buah suku pertama sama dengan 3069. Hasil kali suku ke 4 dan ke 6 dari deret tersebut =

Jawab:

$$r = 2$$

$$S_n = \frac{(r^n - 1)}{r - 1} \quad \text{karena } r > 1$$

$$S_{10} = \frac{a(\dots - \dots)}{\dots - \dots} = \dots$$

$$\Rightarrow \frac{a \times \dots}{\dots} = \dots$$

$$\Rightarrow a = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

$$U_4 = ar^3 = 3 \times 2^3 = 3 \cdot 8 = \dots$$

$$U_6 = ar^5 = \dots \times \dots = \dots \times \dots = \dots$$

$$U_4 \cdot U_6 = \dots \times \dots = 2304$$

3. Tentukan nilai dari deret geometri : $24 + 12 + 6 + \dots$

Jawab:

$$a = U_1 = 24$$

$$r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\dots}{\dots - \dots} = \frac{\dots}{\dots}$$

$$\text{Jadi } S_\infty = \dots$$

4. Jika $a + 2$, $a - 1$, $a - 7$ membentuk barisan geometri, maka tentukan rasionya!

Jawab:

$$\frac{a-1}{a+2} = \frac{a-\dots}{a-\dots} \Rightarrow a = \dots$$

$$r = \frac{\dots - \dots}{\dots + \dots} = \frac{\dots - \dots}{\dots + \dots} = \dots$$

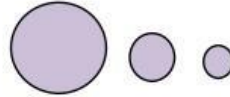
5. Jika suku pertama deret geometri tak hingga adalah 1, sedang jumlah suku-suku yang bernomor ganjil = 2, maka tentukan jumlah deret dengan rasio yang positif !

Jawab:

$$U_1 + U_3 + U_5 + \dots = 2 \Rightarrow \frac{1}{1-r^2} = 2 \Rightarrow r = \frac{\dots}{\dots}$$

$$S_\infty = \frac{1}{1-r} = \dots$$

LATIHAN MANDIRI 2



1. Diketahui p dan q akar-akar persamaan $2x^2 + x + a = 0$. Jika p , q dan $\frac{pq}{2}$ merupakan barisan geometri, maka tentukan a !

Jawab:

2. Dari deret geometri diketahui $U_4 : U_6 = p$ dan $U_2 \cdot U_8 = \frac{1}{p}$ maka tentukan U_1 !

Jawab:

3. Jika jumlah n suku deret geometri yang rasionya r adalah S_n maka tentukan $\frac{S_{6n}}{S_{3n}}$!

Jawab:

4. Diketahui barisan geometri dengan $U_1 = \sqrt[4]{x^3}$ dan $U_4 = \sqrt{x^x}$. Rasio barisan geometri tersebut adalah

Jawab:

5. Jumlah n suku pertama deret geometri dinyatakan dengan $S_n = 2_{n+1} + 2_n - 3$. Rasio deret itu adalah

Jawab:

3. Induksi Matematika

Induksi Matematika adalah Pembuktian suatu teorema atau rumus dengan cara pembuktian dari hal khusus ke yang umum.



Langkah-langkah:

1. Tunjukkan bahwa $S(1)$ benar
2. Asumsikan $S(k)$ maka $S(k+1)$ benar
3. $S(n)$ adalah benar untuk setiap n bilangan positif

Berikut ini Sebuah persamaan yang perlu dibuktikan.

$$S(n) = 1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2$$

Langkah 1:

$$n = 1 \text{ maka } S(1) = 1^2 = 1$$

langkah 2:

$$n = k$$

$$\text{maka } S(k) = 1 + 3 + 5 + \dots + 2k - 1 = k^2$$

jadi akan dibuktikan benar pula $n = k + 1$

$$S(k+1) = 1 + 3 + 5 + \dots + 2k - 1 + 2(k+1) - 1 = (k+1)^2$$

Sederhanakan sisi kiri

$$k^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + 2k - 1 \text{ maka}$$

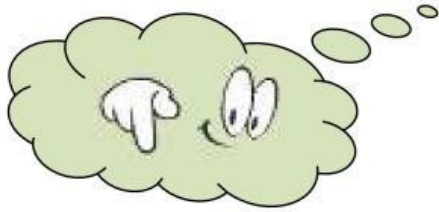
$$k^2 + 2(k+1) - 1 = (k+1)^2$$

$$k^2 + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 \text{ terbukti.}$$



"Tidak ada kata gagal,
yang ada hanya sukses
atau belajar." - by Tung
Desem Waringin

SOAL ULANGAN



*" Satu - satunya yang bisa menghalangi kita adalah
keyakinan yang salah dan sikap yang negatif. "
by dr. Ernest Wong*

1. Tentukan!

a. unsur-unsur yang dinyatakan pada barisan aritmatika di bawah ini

$$a = 3, b = 7, U = 101$$

jawab

b. nilai a dan b nya jika....

$$U_{10} = 7 \quad \text{dan} \quad U_{14} = 15$$

Jawab:

2. Selesaikan soal berikut jika diketahui:

$$a. \quad 6 + 9 + 12 + 15 + \dots S_{10} = \dots$$

Jawab:

b. Jumlah n suku pertama dari sebuah deret aritmetika adalah $S_n = \frac{1}{2} n (3n - 1)$.

Beda dari barisan aritmetika itu adalah....

Jawab:

3. Dari suatu barisan geometri diketahui suku ke 2 adalah $\frac{4}{3}$ dan suku ke 5 adalah 36.

Suku ke 6 barisan tersebut adalah....

Jawab:

4. Sebuah mobil dibeli dengan harga Rp.80.000.000,- Setiap tahun nilai jualnya menjadi $\frac{3}{4}$ dari harga sebelumnya. Berapa nilai jual setelah 3 tahun ?

Jawab:

5. Seorang anak menabung di suatu bank dengan selisih kenaikan tabungan antar bulan tetap. Pada bulan pertama sebesar Rp. 50.000, bulan kedua Rp. 55.000, bulan ketiga Rp. 60.000, dan seterusnya. Besar tabungan anak tersebut selama dua tahun adalah

Jawab:

6. Dari suatu deret geometri yang rasionya 2 diketahui jumlah 10 buah suku pertama sama dengan 3069. Hasil kali suku ke 4 dan ke 6 dari deret tersebut adalah...

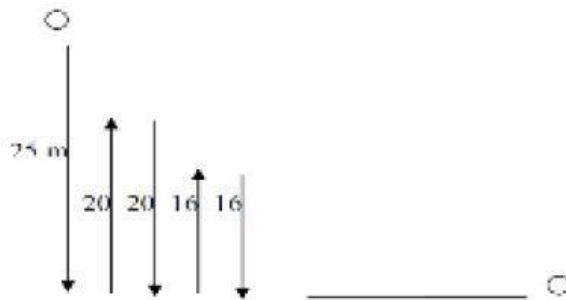
Jawab:

7. Buktikanlah bahwa persamaan berikut benar!

$$1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{1}{2}n(3n - 1)$$

Jawab:

8. Sebuah bola pingpong dijatuhkan dari ketinggian 25 m dan memantul kembali dengan ketinggian $\frac{4}{5}$ kali tinggi sebelumnya. Pemantulan ini berlangsung terus menerus hingga boleh berhenti. Jumlah seluruh lintasan bola adalah...



Jawab:

9. Suatu keluarga mempunyai 6 anak yang usianya pada saat ini membentuk barisan aritmatika. Jika usia anak ke-3 adalah 7 tahun dan usia anak ke-5 adalah 12 tahun, maka jumlah usia enam anak tersebut adalah

Jawab:
