

La llegenda del rei i el savi

Hi havia una vegada un rei molt arrogant que no tractava gens bé els seus súbdits. Aquest rei era poderós i ric, però no era feliç i s'avorria molt. Després de pensar moltíssim sobre què podia fer per trobar alguna cosa que el divertís, va creure que la solució seria convocar un concurs de jocs nous, i va dir que la persona que inventés el joc que li agradés més podria demanar-li el que volgués, i ell li ho donaria.

Molta gent es va presentar al concurs, però el joc que més va agradar al rei va ser el que va presentar Sissa, un savi que va voler inventar un joc on el rei fos molt important però que sense l'ajuda de les altres peces no pogués guanyar mai. Sissa volia que el rei s'adonés de la importància de les altres peces del joc, les quals era com si fossin les persones del seu regne. I aquest va ser el primer joc d'escacs.

El rei va pensar que amb aquest joc podia fer moltes partides i que sempre serien diferents, i això li va agradar moltíssim perquè segur que no s'avorriria. Llavors, va voler complir la seva part del tracte i, tot fanfarró, li va dir a Sissa que demanés el que volgués.

Sissa va dir-li que abans de dir una cosa s'ha d'estar segur que es podrà complir, i el rei, tot presumit li va dir: "és clar, jo sóc molt ric i podré donar-te el que em demanis!". Sissa va dir-li: "d'acord, doncs vull que em doneu 1 gra de blat per la primera casella del tauler, 2 per la segona, 4 per la tercera, i així fins arribar a la casella 64, l'última del tauler".

Al rei li va agafar un atac de riure i va pensar: "quin savi més ruc! Podria demanar-me riqueses i em demana uns quants grans de blat!!!", i va dir als seus criats que li prepararessin els sacs de blat. [...]

Suposem el tauler d'escacs, que té 8 caselles per banda. Tal i com demana la camperola, a la primera li posem un gra, a la segona dos grans, a la tercera quatre grans... Com que anem doblant la quantitat, ho podem expressar en forma de potència de base 2.

Ens quedaria quelcom així: (omple la primera filera de grans de blat amb el resultat que pertoca):

$2^0=$	$2^1=$	$2^2=$	$2^3=$				
					...	2^{62}	2^{63}

1. Quants grans de blat són 2^{63} ?

2. I quant sumen tots els grans de blat del tauler d'escacs? Per esbrinar-ho, hem de descobrir de quina manera podem sumar-los fàcilment, sense haver de fer gaire càlculs. Posem, per exemple, que volem sumar les tres primeres caselles:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 = 1 + 2 + 4 + 8 = \underline{\hspace{2cm}}$$

I ara, les quatre primeres caselles:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Fem el mateix, ara, prenent les cinc primeres:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Els resultats que obtenim, s'assemblen a alguna xifra de les que has omplert a la primera filera?
Sí, oi? Pots deduir alguna constant en els resultats?

Doncs sí, resulta que hem descobert que si volem sumar una progressió de potències, només cal aplicar aquesta norma:

$$a^0 + a^1 + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^n = a^{n+1} - 1$$

On 'n' és l'exponent final que volem sumar. Per exemple, i amb el cas anterior:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 2^{4+1} - 1 = 2^5 - 1$$

Si calculem la xifra, veiem el que havíem deduït, i és que:

$$2^5 - 1 = 32 - 1 = 31.$$

Ja ho tenim! Però compte, que això només serveix si comptem des de la potència a^0

3. Llavors, quan volem sumar els grans de blat del tauler d'escacs, com quedaria l'expressió algebraica?

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{63} = \underline{\hspace{2cm}}$$

En grans de blat, quants serien?

4. Així doncs, anem a la pregunta important: si tu fossis el rei o la reina de la història, acceptaries el pacte que proposa el savi? Ell demanava que el rei li regalés la suma de tots els grans de blat del taulell d'escacs. El que passa, però, és que és difícil fer-nos a la idea de si això és poc o molt, oi?

Fem uns petits càlculs.

Resulta que per comptar grans de blat es fa servir una unitat de mesura que no són kg (pes) ni kl (volum) sinó que es fa servir el **bushel**. Un bushel equival a 5.000.000 de grans de blats (cinc milions). Quants bushel són els grans de blat totals de l'escaquer?

5. Continuem sense saber ben bé si és molt o poc, oi? Una pista més: la producció anual de blat a la Terra es calcula que ronda els 2.000.000.000 de bushels (dos mil milions!). Llavors.. a quants anys de blat equival la petició del savi?

6. Ara sí, què hi dius? Acceptaries el tracte amb el savi? És realista?