



CLASA: IX

Aplicații vectori. Coliniaritate

Breviar teoretic și probleme rezolvate

Doi vectori se numesc paraleli sau coliniari, dacă au aceeași direcție.

Vectorul nul se consider paralel cu orice alt vector.

Dacă $\vec{u} \parallel \vec{v}$ și $\vec{v} \neq \vec{0}$, atunci există a număr real astfel încât $\vec{u} = a \cdot \vec{v}$

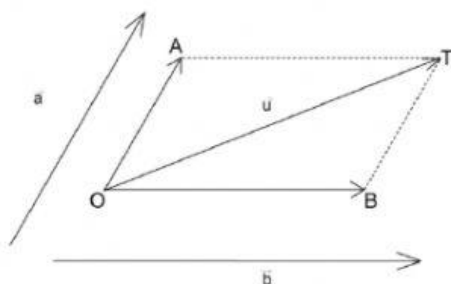
Dacă $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt vectori neparaleli atunci egalitatea $a\vec{u} = b\vec{v}$ este adevărat numai dacă $a=b=0$.

Pentru a demonstra că punctele A,B,C sunt coliniare este suficient să se arate că vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$ sunt coliniari.

Descompunerea a unui vector după doi vectori necoliniari și nenuli

Pentru descompune un vector $\vec{u}$ din plan după doi vectori necoliniari $\vec{a}$ și $\vec{b}$, trebuie să determinăm coeficienții reali α și β din suma $\vec{u} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$.

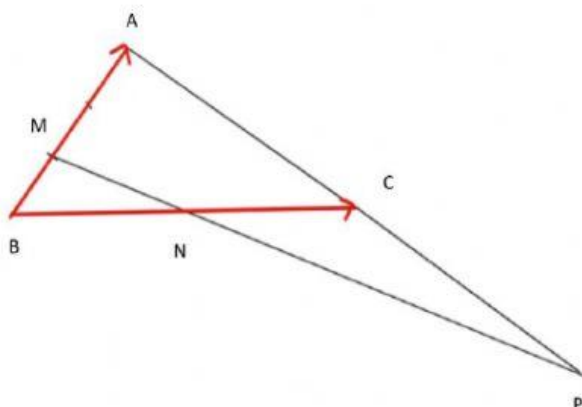
Pentru a putea face acest lucru, vom lua un punct O pe dreapta suport a vectorului $\vec{u}$, vom construi dreptele cu aceleași direcții ca vectorii necoliniari $\vec{a}$ și $\vec{b}$, care să treacă prin punctul O, la fel ca în figura de mai jos



Din regula paralelogramului $\vec{u} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$.

Aplicații

- 1) Se consideră $\triangle ABC$ și M, N, P astfel încât $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$,
 $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CP}$. Arătați că : a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$,
 $\overrightarrow{NP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$; b) M, N, P sunt coliniare.



Rezolvare:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$$

$$= \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$$

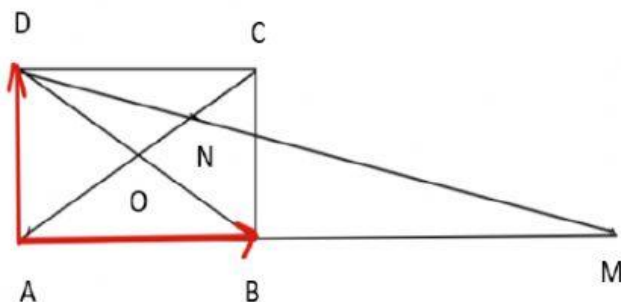
Pentru a demonstra coliniaritatea punctelor M, N, P vom demonstra că vectorii $\overrightarrow{MN}$ și $\overrightarrow{NP}$ sunt coliniari, adică există un număr real α , astfel ca $\overrightarrow{NP} = \alpha \overrightarrow{MN}$

Observăm că $\overrightarrow{NP} = 3 \overrightarrow{MN}$, deci M, N, P sunt coliniari

- 2) Se dă dreptunghiul $ABCD$ și $O = AC \cap BD$. Fie punctele N și M astfel încât $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{AB}$

a). Să se exprime vectorii $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OB}$, în funcție de vectorii $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AD}$.

b). Să se demonstreze că punctele D, N, M sunt coliniare.



Rezolvare:

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \text{ sau } \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{BO} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

Pentru a demonstra ca D,N,M sunt coliniare vom demonstra că vectorii $\overrightarrow{DN}$ și $\overrightarrow{DM}$ sunt coliniari, avem descompunerea vectori după direcțiile vectorilor $\overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

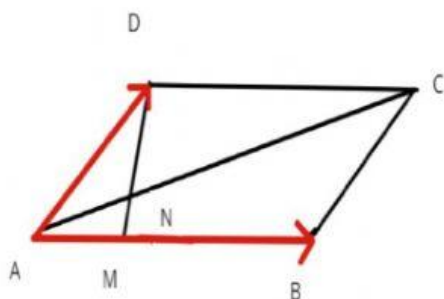
$$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AB}$$

$$\text{Observăm că } 4\overrightarrow{DN} = 4\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right) = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DM}$$

Deci $\overrightarrow{DN}$ și $\overrightarrow{DM}$ sunt vectori coliniari, deci și punctele D,N,M sunt coliniare.

3) Pe latura AB și diagonala AC ale paralelogramului ABCD se iau punctele M și N astfel încât $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

Arătați că punctele M,N,D sunt coliniare.



Rezolvare:

Pentru a demonstra că punctele M,N,D sunt coliniare vom demonstra că vectorii $\overrightarrow{MD}$ și $\overrightarrow{MN}$ sunt coliniari.

Vom descompune vectorii $\overrightarrow{MD}$ și $\overrightarrow{MN}$ după vectorii $\overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

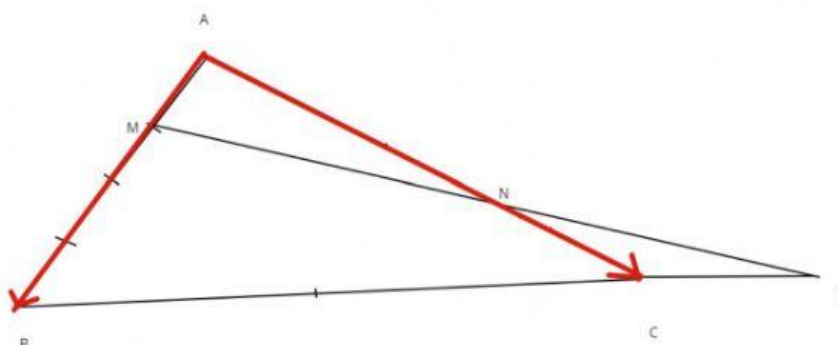
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

Observăm ca $4\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD}$, deci vectorii $\overrightarrow{MD}$ și $\overrightarrow{MN}$ sunt coliniari rezultă că și M,N,D sunt coliniare.

4) Pe laturile $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ ale triunghiului $\triangle ABC$ se consideră punctele M,N și respectiv P, astfel încât

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{PB} = 5\overrightarrow{PC} \text{ și } \overrightarrow{CN} = \frac{3}{5}\overrightarrow{NA}.$$

Arătați că punctele M,N,P sunt coliniare.



Rezolvare 1:

Acum să demonstrăm această problemă cu ajutorul vectorilor, adică M,N,P puncte coliniare dacă vectorii $\overrightarrow{MN}$ și $\overrightarrow{MP}$ sunt vectori coliniari.

$$\frac{AM}{MB} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}$$

$$PB = 5PC \Leftrightarrow BC = 4PC \Leftrightarrow \overrightarrow{PC} = \frac{1}{4} \overrightarrow{CB} \text{ și } \overrightarrow{PB} = \frac{5}{4} \overrightarrow{CB}$$

$$\frac{CN}{NA} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{AC}{NA} = \frac{8}{5} \Leftrightarrow \overrightarrow{NA} = \frac{5}{8} \overrightarrow{CA}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BA} + \frac{5}{8} \overrightarrow{AC} = \frac{-1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{5}{8} \overrightarrow{AC}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MP} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BP} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{5}{4} \overrightarrow{BC} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{5}{4} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{3}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{5}{4} \overrightarrow{AC} - \frac{5}{4} \overrightarrow{AB} \\ &= \frac{-2}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{5}{4} \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP}$, rezultă că $\overrightarrow{MN}$ și $\overrightarrow{MP}$ sunt vectori coliniari, deci M,N,P puncte coliniare.

Rezolvare 2:

Din reciproca teoremei lui Menelaus aplicată triunghiului ABC asi punctelor M,N,P care imparte laturile sau prelungirile lor avem

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CN}{NA} = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = 1 \text{ rezultă } M,N,P \text{ puncte coliniare.}$$