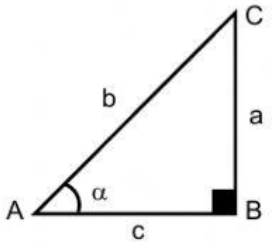
MATEMÁTICA
IV SECUNDARIA
Ficha 9: Razones trigonométricas de ángulos agudos

DEFINICIÓN

La razón trigonométrica de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo se define como el cociente que se obtiene al dividir las medidas de las longitudes de dos de los lados del triángulo rectángulo con respecto a uno de los ángulos agudos.

Sea el triángulo rectángulo ABC recto en B.



Elementos:

- Catetos (con respecto a α)
  - Cateto opuesto (C.O.) → a
  - Cateto adyacente (C.A.) → c
- Hipotenusa (H) → b
- m ∢ CAB → α (agudo)

Cumpliéndose: (Teorema de Pitágoras) $b^2 = a^2 + c^2$

Definimos con respecto a α:

Seno de α → $\operatorname{sen}\alpha = \frac{CO}{H} = \frac{a}{b}$

Coseno de α → $\cos\alpha = \frac{CA}{H} = \frac{c}{b}$

Tangente de α → $\operatorname{tg}\alpha = \frac{CO}{CA} = \frac{a}{c}$

Cotangente de α → $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{CA}{CO} = \frac{c}{a}$

Secante de α → $\sec\alpha = \frac{H}{CA} = \frac{b}{c}$

Cosecante de α → $\csc\alpha = \frac{H}{CO} = \frac{b}{a}$

INVERSAS

Por ejemplo: $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{3}$ → $\csc\alpha = 3$

inversa

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{3}$ → $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{5}$

NOTA:

1. En todo triángulo rectángulo **hipotenusa > catetos**

   Entonces $0 < \text{sen}\,\alpha < 1 \quad \wedge \quad 0 < \cos\alpha < 1$

   $\sec\alpha > 1 \quad \wedge \quad \csc\alpha > 1$

2. $\text{sen}^2\alpha \neq \text{sen}\alpha^2$

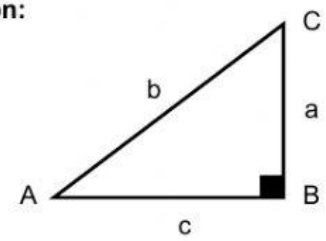
3. $\frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\beta} \neq \frac{\alpha}{\beta}$

APLICACIÓN

1. En un triángulo rectángulo ABC recto en B reducir:

   $$E = \text{senA secC} + \cos C \ \csc A$$

   Solución:



   Del gráfico:

   $E = \frac{a}{b} \times \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \times \frac{b}{a}$

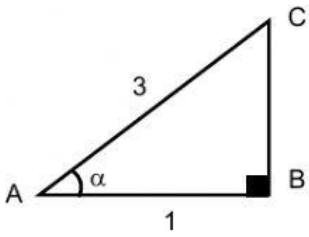
   $E = 1 + 1 \Rightarrow E = 2$

2. Si: α es un ángulo agudo tal que $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. Calcular tg α.

   Solución:

   Del dato: $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ → cateto adyacente
   → hipotenusa

   α debe estar dentro de un triángulo rectángulo.



   $2\sqrt{2}$ → Por Pitágoras:

   $3^2 = 1^2 + \overline{BC}^2$

   $\overline{BC} = 2\sqrt{2}$

   Piden: $\text{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{1} \Rightarrow 2\sqrt{2}$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. En un triángulo ABC recto en C simplificar:

$$E = a.\ ctgA - c.\ senB$$

a) 0 b) 1/3 c) a
d) b e) 1/2

2. En un triángulo rectángulo ABC recto en B reducir:

$$E = (secA - senC)\ ctgA - cosC$$

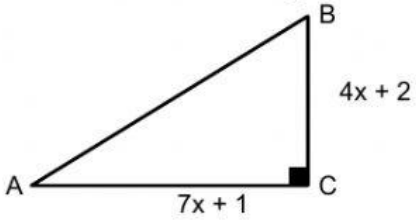
a) 1 b) 2 c) 0
d) 3 e) -1

3. En un triángulo rectángulo ABC recto en B se cumple que: 2tgA = cscC
Calcular: $E = 2senA + \sqrt{3}tgC$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

4. Del gráfico calcular "x". Si: $tgB = \frac{3}{2}$

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5



5. Si: $sec\,x = \sqrt{7}$
Calcular: $E = tg^2x + \sqrt{42}\,senx$

a) 10 b) 12 c) 14
d) 18 e) 20

6. En un triángulo ABC recto en A se cumple tgB = 0,75; además: a – b = 6 m
Hallar su perímetro.

a) 12 m b) 24 m c) 36 m
d) 42 m e) 45 m

7. Se tiene un triángulo rectángulo ABC ($\hat{A} = 90°$).
Calcular: E = b. tgC + b. ctgB - c

a) a b) b c) c
d) 2a e) 2c

8. En un triángulo ABC recto en C se cumple 3senA = 2senB.
Calcular: $E = \sqrt{13}senA + 6tgB$

a) 7 b) 9 c) 11
d) 13 e) 15

9. Si: $sen\alpha = \frac{2}{3}$ donde "α" es agudo. Calcule: $ctg\alpha$

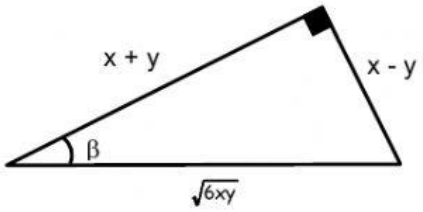
a) $\sqrt{5}$ b) $2\sqrt{5}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
d) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ e) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

10. Si: $sen\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$
Calcular: $E = 3sec\theta - \sqrt{7}tg\theta$

a) 1/3 b) 2/3 c) 5/3
d) 7/3 e) 1

11. En un triángulo rectángulo ABC (B = 90°) tgA = 4tgC. Si el mayor lado mide $8\sqrt{5}$ m. ¿Cuál es el área del triángulo?

a) 16 cm^2 b) 32 c) 64
d) 8 e) 128

12. Del gráfico, calcular $ctg^2\beta$

a) 1
b) 3
c) 5
d) 7
e) 8