

Проект урока обобщающего повторения по теме «Логарифмы» (10–11 класс)

Основная цель урока: сформировать у учащихся целостное представление о свойствах логарифмов.

Комментарий для учителя. Содержание урока соответствует ФГОС и может варьироваться учителем в зависимости от учебной ситуации в классе, а также выбранной содержательно-методической линии. Предлагаемый проект урока не связан ни с одним учебником, является универсальным и может быть использован в 10 или 11 классе.

Первый блок заданий

Решить уравнение.

$$1.1. \log_{\frac{1}{7}}(7 - x) = -2.$$

$$1.2. \log_5(7 - x) = \log_5(3 - x) + 1.$$

$$1.3. \log_3(2 - x) = \log_2 0,5 + \log_3(3x + 6).$$

$$1.4. \log_{\frac{1}{2}} x + 2 \log_2 x = 4.$$

$$1.5. (\log_4(3x - 4) - \log_4(x + 6)) \cdot \log_5 x = 0.$$

$$1.6. 2^{\log_8(5x-3)} = 4.$$

Краткое решение.

$$1.1. \log_{\frac{1}{7}}(7 - x) = -2, \quad 7 - x = \left(\frac{1}{7}\right)^{-2}, \quad 7 - x = 49, \quad x = -42.$$

$$1.2. \log_5(7 - x) = \log_5(3 - x) + 1, \log_5(7 - x) = \log_5(3 - x) + \log_5 5, \\ \log_5(7 - x) = \log_5(5(3 - x)), \quad \log_5(7 - x) = \log_5(15 - 5x), \quad 7 - x = 15 - 5x, \\ 5x - x = 15 - 7, 4x = 8, x = 2. \text{Проверкой убеждаемся, что } 2 \text{ — корень уравнения.}$$

$$1.3. \log_3(2 - x) = \log_2 0,5 + \log_3(3x + 6), \log_3(2 - x) = -1 + \log_3(3x + 6), \\ \log_3(2 - x) = \log_3 \frac{1}{3} + \log_3(3x + 6), \quad \log_3(2 - x) = \log_3(x + 2), 2 - x = x + 2, \\ x = 0. \text{Проверкой убеждаемся, что } 0 \text{ — корень уравнения.}$$

$$1.4. \log_{\frac{1}{2}} x + 2 \log_2 x = 4, -\log_2 x + 2 \log_2 x = 4, \log_2 x = 4, x = 16.$$

$$1.5. (\log_4(3x - 4) - \log_4(x + 6)) \cdot \log_5 x = 0, (\log_4(3x - 4) - \log_4(x + 6)) = 0 \text{ или } \\ \log_5 x = 0, \log_4(3x - 4) = \log_4(x + 6) \text{ или } x = 1, 3x - 4 = x + 6 \text{ или } x = 1, \\ x = 5 \text{ или } x = 1. \text{Проверкой убеждаемся, что } 5 \text{ — корень уравнения.}$$

$$1.6. 2^{\log_8(5x-3)} = 4, 8^{\frac{1}{3} \log_8(5x-3)} = 4, (5x - 3)^{\frac{1}{3}} = 4, 5x - 3 = 64, 5x = 67, \\ 10x = 134, x = 13,4.$$

Комментарий для учителя. Выбор предложенных заданий определён необходимостью методически предупредить ошибку, связанную с формальным пониманием алгоритма решения логарифмических уравнений — «отбросить логарифмы».

Классический пример, который можно предложить ученикам, — решить уравнение $\log_2 x + \log_2 x = \log_2 x$. Если применить «отбрасывание логарифмов», то получится $x + x = x, x = 0$. А теперь становится очевидно, что 0 точно не может быть корнем этого уравнения, а вот число 1 — его корень.

Второй блок заданий

Найти значение выражения.

2.1. $\log_{14} 2 + \log_{14} 7$.

2.2. $\log_2 36 - \log_2 9$.

2.3. $\log_8 4 + \log_{27} 81$.

2.4. $\lg 0,5 + \lg 2$.

2.5. $\log_2 \log_3 81$.

2.6. $\log_5 16 \cdot \log_2 5$.

Краткое решение.

2.1. $\log_{14} 2 + \log_{14} 7 = \log_{14} (2 \cdot 7) = \log_{14} 14 = 1$.

2.2. $\log_2 36 - \log_2 9 = \log_2 \left(\frac{36}{9}\right) = \log_2 4 = 2$.

2.3. $\log_8 4 + \log_{27} 81 = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2$.

2.4. $\lg 0,5 + \lg 2 = \lg (0,5 \cdot 2) = \lg 1 = 0$.

2.5. $\log_2 \log_3 81 = \log_2 4 = 2$.

2.6. $\log_5 16 \cdot \log_2 5 = \frac{\log_2 16}{\log_2 5} \cdot \log_2 5 = \log_2 16 = 4$.

Третий блок заданий

Решить практикоориентированную задачу.

3.1. В телевизоре ёмкость высоковольтного конденсатора $C = 2 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 5 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 16$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое формулой $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 0,7$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошла 21 с. Ответ дайте в киловольтах.

3.2. Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне

$T_{\text{п}} = 20^{\circ}\text{C}$, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m = 0,2$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x (м), вода охлаждается от начальной температуры $T_{\text{в}} = 100^{\circ}\text{C}$ до температуры T , причём

$$x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{в}} - T_{\text{п}}}{T - T_{\text{п}}},$$

где $c = 4200 \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot ^{\circ}\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 42 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^{\circ}\text{C}}$ — коэффициент теплообмена,

а $\alpha = 1,4$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 28 м.

Краткое решение.

3.1. Выполняя подстановку заданных в условии задачи значений в указанную формулу $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$, получаем: $21 = 0,7 \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \log_2 \frac{16}{U}$, $3 = \log_2 \frac{16}{U}$, $\frac{16}{U} = 8, U = 2$.

3.2. Выполняя подстановку заданных в условии задачи значений в указанную формулу $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{в}} - T_{\text{п}}}{T - T_{\text{п}}}$, получаем: $28 = 1,4 \cdot \frac{4200 \cdot 0,2}{42} \log_2 \frac{100 - 20}{T - 20}$, $1 = \log_2 \frac{80}{T - 20}$, $T - 20 = 40$, $T = 60$.

Четвёртый блок заданий

Найти область допустимых значений переменной x в выражении.

4.1. $\log_x(7 - x)$

4.2. $\log_5(3 - x) + \log_2(2x + 4)$

4.3. $\log_7(9 - x^2) - \log_7(3x - 6)$

4.4. $\frac{1}{x} \cdot \log_2(x + 1)$

Краткое решение.

4.1. $\log_x(7 - x)$, $x > 0, x \neq 1, 7 - x > 0$, т.е. $(0; 1) \cup (1; 7)$.

4.2. $\log_5(3 - x) + \log_2(2x + 4)$, $3 - x > 0, 2x + 4 > 0$, т.е. $(-2; 3)$.

4.3. $\log_7(9 - x^2) - \log_7(3x - 6)$, $9 - x^2 > 0, 3x - 6 > 0$, т.е. $(2; 3)$.

4.4. $\frac{1}{x} \cdot \log_2(x + 1)$, $x \neq 0, x + 1 > 0$, т.е. $(-1; 0) \cup (0; +\infty)$.

Пятый блок заданий

Резервное задание. Решить неравенство.

5.1. $(x^2 - 5) \cdot \log_{\sqrt{x}+1} 0,005 \geq 0$.

Краткое решение.

При всех допустимых значениях переменной основание логарифма принимает значения большие 1, значит все его значения для числа 0,005 отрицательные. Следовательно, второй множитель в левой части неравенства принимает только

отрицательные значения, и тогда неравенство равносильно системе
$$\begin{cases} x^2 - 5 \leq 0, \\ x \geq 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 5 \leq 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) \leq 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq \sqrt{5}.$$

Домашнее задание(ориентировочное время выполнения **15 минут**)

1. Решите уравнение $\log_{0,5}(-2x + 4) = -3$.
2. Решите уравнение $\log_3 2 + \log_3(x - 1) = \log_3(x + 7)$.
3. Найдите значение выражения $\log_{15} 3 + \log_{15} 5$.
4. Найдите значение выражения $\log_5 75 - \log_5 3$.
5. Найдите значение выражения $4^{\log_2 3}$.
6. Водолазный колокол, содержащий $\nu = 2$ моля воздуха при давлении $p_1 = 1,5$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного давления p_2 . Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется формулой $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$, где $\alpha = 5,75 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ — постоянная, $T = 300 \text{ К}$ — температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (в атм) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 6900 Дж.

Краткое решение.

1. $\log_{0,5}(-2x + 4) = -3$, $-2x + 4 = 0,5^{-3}$, $-2x + 4 = 8$, $-2x = 4$, $x = -2$.
2. $\log_3 2 + \log_3(x - 1) = \log_3(x + 7)$, $2(x - 1) = x + 7$, $x = 9$. Проверкой убеждаемся, что 9 — корень уравнения.
3. $\log_{15} 3 + \log_{15} 5 = \log_{15}(3 \cdot 5) = \log_{15} 15 = 1$.
4. $\log_5 75 - \log_5 3 = \log_5 \left(\frac{75}{3}\right) = \log_5 25 = 2$.
5. $4^{\log_2 3} = (2^2)^{\log_2 3} = 2^{2 \cdot \log_2 3} = (2^{\log_2 3})^2 = 3^2 = 9$.
6. Выполняя подстановку заданных в условии задачи значений в указанную формулу $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$, получаем: $6900 = 5,75 \cdot 2 \cdot 300 \cdot \log_2 \left(\frac{p_2}{1,5}\right)$, $23 = 11,5 \cdot \log_2 \left(\frac{p_2}{1,5}\right)$,
 $2 = \log_2 \left(\frac{p_2}{1,5}\right)$, $\frac{p_2}{1,5} = 4$, $p_2 = 6$.

