

## Екстремални задачи в алгебрата



**Задача:** Представете числото 18 като сума на три положителни събираеми със следните свойства: отношението на първите две събираеми да бъде 1:2, а сборът от произведението на първите две числа и умноженото с 4 трето число да бъде възможно най-малък. Намерете този сбор.



### 1. Избор на променлива

$$\begin{aligned} a + b + c &= 18 \\ \frac{a}{b} = \frac{1}{2} &\Rightarrow \begin{cases} a = x \\ b = 2x \end{cases} \\ \Rightarrow x + 2x + c &= 18 \Rightarrow c = 18 - 3x \end{aligned}$$

### 2. Съставяне на аналитичен израз

$$M = ab + 4c = x \cdot 2x + 4(18 - 3x) = 2x^2 + 72 - 12x$$

### 3. Определение на функцията $y = f(x)$ , $x \in DM$

$$\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ c > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2x > 0 \\ 18 - 3x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 6 \end{cases} \Rightarrow x \in (0; 6)$$

$$M = 2x^2 - 12x + 72 = 2(x^2 - 6x + 36)$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 36, DM: x \in (0; 6)$$

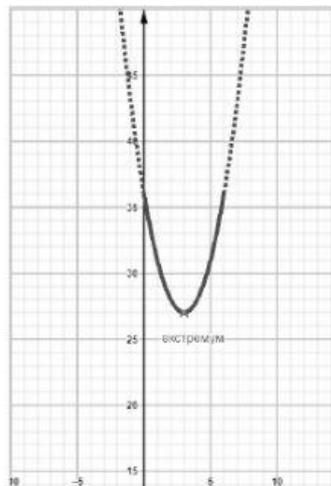
#### 4. Решаване на екстремална задача

##### I начин

$$f(x) = x^2 - 6x + 36, DM: x \in (0; 6)$$

$$a = 1; b = -6; c = 36$$

- $a = 1 > 0 \Rightarrow$  
- $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\left(\frac{-6}{2 \cdot 1}\right) = 3$   
 $\Rightarrow \min_{x \in (0; 6)} f(x) = f(3) = 27$   
 $M = 2f(x) \geq 2 \cdot 27 \Rightarrow M \geq 54$



##### II начин

$$M = 2x^2 - 12x + 72 = x^2 + 36 - 12x + x^2 + 36 = x^2 + (6 - x)^2 + 36$$

Прилагаме неравенството между средноквадратично и средноаритметично

$$\sqrt{\frac{p^2 + q^2}{2}} \geq \frac{p + q}{2} \text{ при } p > 0, q > 0 \text{ като равенство се достига при } p = q$$

При  $p = x, q = 6 - x$  получаваме

$$\Rightarrow \frac{x^2 + (6 - x)^2}{2} \geq \left(\frac{x + (6 - x)}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 + (6 - x)^2 \geq 2 \left(\frac{x + 6 - x}{2}\right)^2 = 2 \cdot 3^2 = 18$$

$$\Rightarrow M \geq 18 + 36 \Rightarrow M \geq 54$$

НМС на  $M$  се получава при  $p = q \Rightarrow x = 6 - x \Rightarrow x = 3$

#### 5. Извод

$$\begin{cases} a = x = 3 \\ b = 2x = 6 \\ c = 18 - 3x = 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 18 = 3 + 6 + 9$$

и

$$\min(ab + 4c) = 54$$