INDUKSI MATEMATIKA

Matematika

SMA/MA
Kelas XI

ISMII WAHIBATUL KHOIRIYAH
PENDIDIKAN MATEMATIKA
UNIVERSITAS ISLAM MALANG

LEMBAR KERJA PESERTA DIDIK

INDUKSI MATEMATIKA

TUJUAN PEMBELAJARAN

1. Peserta didik dapat merancang formula suatu pola barisan.
2. Peserta didik dapat mendeskripsikan pengertian, prinsip induksi matematika.

PETUNJUK PENGISIAN LKPD

1. Pahami, catat, dan pelajari video materi pada visimubertematik yang telah disediakan.
2. Isilah identitas (Nama dan Kelas) pada kolom lembar jawaban yang telah disediakan.
   Kolom Nama : (Isilah sesuai dengan **NAMA LENGKAP**, Contoh : **NAYLA CHUSNA**)
   Kolom Kelas : (Isilah sesuai dengan kelas peserta didik, Contoh : XI SMA).
3. Kerjakan lembar kerja peserta didik ini dengan cermat, dengan cara mengisi bagian kolom yang sudah disediakan.
4. Jangan lupa klik **"FINISH"** ketika sudah mengerjakan.
5. Selanjutnya klik **"Email my answers to my teacher"**.

IDENTITAS

Nama :

Kelas :

VIDEO PEMBELAJARAN 1

Silahkan kalian tonton video pembelajaran matematika (visimubertematik) dibawah ini.

RINGKASAN MATERI

Pengertian Induksi Matematika

Induksi matematika adalah teknik untuk membuktikan kebenaran suatu pernyataan matematika, terutama yang berhubungan dengan bilangan asli, bukan untuk menemukan suatu formula.

Prinsip Induksi Matematika

Misalkan $P(n)$ adalah sifat yang didefinisikan untuk suatu bilangan asli n, dan misalkan a merupakan suatu bilangan asli tertentu. Jika dua pernyataan berikut bernilai benar :

1. *P(a)* bernilai benar
2. Untuk sebarang bilangan asli $k \geq a$ jika *P(k)* bernilai benar, maka *P(k+1)* juga bernilai benar.

Maka pernyataan untuk sebarang bilangan asli $n \geq a, P(n)$ bernilai benar.

Metode Pembuktian Dengan Induksi Matematika

Pembuktian dengan induksi matematika terdiri dari dua langkah. Langkah pertama disebut sebagai langkah dasar dan langkah kedua disebut sebagai langkah induksi. Pada suatu pernyataan "untuk sebarang bilangan asli $n \geq a$, dengan a adalah bilangan asli tertentu, sifat *P(n)* bernilai benar". Untuk membuktikan pernyataan tersebut, kita akan menjalankan dua langkah berikut :

- Langkah dasar *(basic step)*

Akan ditunjukkan bahwa *P(a)* bernilai benar

- Langkah induksi

Akan ditunjukkan bahwa untuk sebarang bilangan asli $k \geq a$, dengan a adalah bilangan asli tertentu, jika *P(k)* bernilai benar maka *P(k+1)* juga bernilai benar.

CONTOH

Buktikan bahwa jumlah *n* bilangan asli yang pertama sama dengan $\frac{n(n+1)}{2}$

Jawab :

Dibuktikan bahwa untuk sebarang bilangan asli $n \geq 1$, maka

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Misalkan $P(n)$ adalah persamaan

$$P(n) = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- **Langkah dasar**

  Akan ditunjukkan bahwa $P(1)$ bernilai benar

  Untuk $n = 1$, maka ruas kiri $P(1) = 1$ dan ruas kanan $P(1) = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$ jadi $P(1)$ bernilai benar (Langkah dasar selesai).

- **Langkah Induksi**

  Akan ditunjukkan bahwa untuk sebarang bilangan asli $n = k \geq 1$, jika $P(k)$ bernilai benar maka $P(k+1)$ juga bernilai benar.

  Misalkan bahwa $P(k)$ diasumsikan bernilai benar untuk sebarang bilangan asli $n = k \geq 1$, yaitu

  $$P(k) = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

  Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa untuk $n = k + 1$ maka $P(k+1)$ juga bernilai benar, yaitu

  $$P(k+1) = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

  Atau ekuivalen dengan

  $$P(k+1) = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

  Karena $P(k) = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ adalah pernyataan yang benar, maka dari ruas kiri $P(k+1)$ diperoleh:

  $$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k + (k+1) \\ &= (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k) + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} \\ &= \frac{k^2 + k}{2} + \frac{2k+2}{2} \\ &= \frac{k^2 + 3k + 2}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

  Kedua ruas dari $P(k+1)$ sama, maka $P(k+1)$ bernilai benar. (Langkah Induksi selesai). Karena langkah dasar dan langkah induksi dipenuhi, maka menurut prinsip induksi matematika terbukti bahwa $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ untuk sebarang bilangan asli $n \geq 1$.

KERJAKAN SOAL BERIKUT INI

1. Tentukan $P(k + 1)$dari rumus $P(k) = \frac{1}{2(k+2)}$

   Jawab :

$$
\begin{aligned}
P(k) &= \frac{\dots}{\dots(\dots + 2)} \\
P(k+1) &= \frac{1}{2((\dots + 1) + \dots))} \\
&= \frac{\dots}{2(\dots + \dots)} \\
&= \frac{1}{2k+6}
\end{aligned}
$$

2. Buktikan kebenaran pernyataan $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$ untuk sebarang bilangan asli n.

   Jawab :

   Misalkan $P(n) = 2 + 4 + 6 + 2n = n(n + 1)$

   - Langkah dasar

     Untuk $n = 1$, maka $P(1) = \dots(\dots + \dots) = \dots(\dots)$

     Jadi $n = \dots$ benar (langkah dasar selesai)

   - Langkah induksi

     Untuk $n = k$, dengan k adalah sebarang bilangan asli

     Maka $P(n) = 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$

     $P(k) = 2 + 4 + 6 + \cdots + \dots = \dots(\dots + 1), n = k$ benar

     Untuk $n = k + 1$, Maka

$$
\begin{aligned}
P(k+1) &= 2 + 4 + 6 + \cdots + 2k + \dots(\dots + \dots) = (\dots + \dots)(k + 2) \\
&= 2 + 4 + 6 + \cdots + \dots + 2(k + 1) \\
&= (2 + 4 + 6 + \cdots + 2k) + \dots(k + 1) \\
&= k(\dots + \dots) + 2(\dots + \dots) \\
&= k^2 + \dots + \dots + \dots \\
&= \dots^{\dots} + \dots + \dots \\
&= (k + \dots)(\dots + 2)
\end{aligned}
$$

   Kedua ruas dari $P(k + 1)$ sama, maka $P(k + 1)$ bernilai benar (Langkah induksi selesai). Karena prinsip induksi matematika terpenuhi, maka menurut prinsip induksi matematika pernyataan $P(n)$ benar untuk setiap n bilangan asli.