

# Lembar Kerja Mahasiswa

Nama : .....

NIM : .....

## Persamaan Differensial Tingkat Satu Derajat Satu

a. Persamaan Differensial Faktor Integrasi dan Cara Menyelesaikannya

b. Persamaan Differensial Linier dan Cara Menyelesaikannya

c. Persamaan Differensial Bernoulli dan Cara Menyelesaikannya

### Bahan Kajian

1. Menyampaikan dan menjelaskan Defenisi, Teorema dan Sifat-sifat pada Persamaan Differensial Faktor Integrasi dan Cara Menyelesaikannya
2. Menyampaikan dan menjelaskan Defenisi, Teorema dan Sifat-sifat pada Persamaan Differensial Linier dan Cara Menyelesaikannya
3. Menyampaikan dan menjelaskan Defenisi, Teorema dan Sifat-sifat pada Persamaan Differensial Bernoulli Dan Cara Menyelesaikannya

## Persamaan Differensial Faktor Integrasi

Jika persamaan differensial  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  ..... 1)

Tidak eksak atau  $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ , dalam hal ini mungkin dapat ditemukan suatu fungsi

$u = u(x, y)$ , sehingga :

$$u(x, y)P(x, y)dx + u(x, y)Q(x, y)dy = 0 \quad \dots\dots\dots 2)$$

Menjadi persamaan differensial eksak dan berlakulah :

$\frac{\partial(uP)}{\partial y} = \frac{\partial(uQ)}{\partial x}$ , jika demikian  $u = u(x, y)$  dinamakan faktor integrasi, maka :

$\overline{P(x, y)} dx + \overline{Q(x, y)} dy = 0$ , eksak dengan :

$$\overline{P(x, y)} = u(x, y)P(x, y) \text{ dan } \overline{Q(x, y)} = u(x, y)Q(x, y)$$

## Persamaan Differensial linier

Bentuk Baku :  $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$

Persamaan ini dalam Bentuk Umum adalah :

$R(x)\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$  dan akan ekivalen dengan bentuk baku jika  $R(x) \neq 0$

sehingga dapat ditulis :

$$dy + p(x)ydx = q(x)dx$$

$$[p(x)y - q(x)]dx + dy = 0$$

$$P(x, y) = p(x)y - q(x) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = p(x)$$

$$Q(x, y) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

Karena  $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ , maka persamaan differensial ini tidak Exact.

$$\Rightarrow \frac{(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x})}{0} = \frac{p(x) - 0}{1} = p(x) \Rightarrow u = e^{\int p(x)dx} \text{ merupakan faktor integrasi.}$$

Dengan demikian persamaan differensial menjadi :

$$e^{\int p(x)dx} \frac{dy}{dx} + p(x)ye^{\int p(x)dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx} (ye^{\int p(x)dx}) = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{d}{dx} (ye^{\int p(x)dx}) = \int q(x)e^{\int p(x)dx} + C$$

$$\Rightarrow ye^{\int p(x)dx} = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C$$

$$\text{Atau : } y = e^{-\int p(x)dx} (\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C)$$

Merupakan penyelesaian umum dengan  $p(x)$  dan  $q(x)$  fungsi kontinu.

## Persamaan Differensial bernoulli

Bentuk Umum :

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = y^n q(x), \text{ dimana : } n > 1.$$

Cara Menyelesaikan :

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = y^n q(x) \quad \text{Bagi dengan : } y^n$$

$$\Rightarrow y^{-n} \frac{dy}{dx} + p(x) \frac{1}{y^{n-1}} = q(x) \quad \dots \dots \dots *)$$

$$\text{Ambil : } v = \frac{1}{y^{n-1}} = y^{1-n} \Rightarrow \frac{dv}{dy} = \frac{(1-n)}{y^n}$$

$$\text{Perhatikan : } \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{(1-n)}{y^n} \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{1}{y^n} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n} \frac{dv}{dx}$$

Selanjutnya substitusi ke persamaan \*), diperoleh :

$$\frac{1}{1-n} \frac{dv}{dx} + p(x) v = q(x), \text{ karena } n \neq 1, \text{ maka :}$$

$$\frac{dv}{dx} + \bar{p}(x)v = \bar{q}(x) \quad \dots \dots \dots **)$$

$$\text{Dimana : } \bar{p}(x) = (1-n)p(x) \text{ dan } \bar{q}(x) = (1-n)q(x)$$

Pesamaan \*\*) merupakan persamaan differensial Linier,  
dan cara menyelesaikannya sudah didiskusikan sebelumnya.

$$[v = e^{-\int \bar{p}(x) dx} (\int \bar{q}(x) e^{\int \bar{p}(x) dx} dx + C)]$$



# a. Persamaan Differensial Faktor Integrasi dan Cara Menyelesaiannya

Lengkapilah titik pada penyelesaian persamaan differensial faktor integrasi berikut ini

$$(x + 2y)dx + x dy = 0$$

$$P(x, y) = x + 2y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \dots$$

$$Q(x, y) = x \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \dots$$

Karena  $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ , maka persamaan differensial ini tidak Exact.

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)}{Q} = \frac{2 - 1}{x} = \dots \Rightarrow u = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)}{P} = \frac{1 - 2}{x + 2y} = \dots \Rightarrow \text{bukan salah satu dari a) dan b)}$$

Jadi faktor integrasinya adalah :  $u = x$ , sehingga persamaan differensial menjadi :

$$\overline{P(x, y)}dx + \overline{Q(x, y)}dy = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x + 2y)dx + x^2 dy = 0$$

$$\overline{P(x, y)} = x^2 + 2xy \Rightarrow \frac{\partial \overline{P}}{\partial y} = \dots$$

$$\overline{Q(x, y)} = x^2 \Rightarrow \frac{\partial \overline{Q}}{\partial x} = \dots$$

Karena  $\frac{\partial \overline{P}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{Q}}{\partial x}$ , maka persamaan differensial ini Exact.

Misalkan penyelesaian umum adalah  $\mu(x, y) = C$ , maka :

$$\text{Dari : } \frac{\partial [\mu(x, y)]}{\partial x} = P(x, y), \text{ diperoleh :}$$

$$d[\mu(x, y)] = (x^2 + 2xy) dx$$

$$\Leftrightarrow \int d[\mu(x, y)] = \int (x^2 + 2xy) dx$$

$$\Rightarrow \mu(x, y) = \int (x^2 + 2xy) dx + \dots$$

$$\Rightarrow \mu(x, y) = \dots$$

$$\Rightarrow \mu(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + x^2y + f(y) \dots \dots \dots 1) |$$

Untuk mendapatkan  $f(y)$ , turunkan persamaan 1) terhadap  $y$  dan samakan dengan  $Q(x, y)$ , yaitu :

$$\frac{\partial [\mu(x, y)]}{\partial y} = Q(x, y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial [\mu(x, y)]}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{3}x^3 + x^2y + f(y) \right) = x^2 + f'(y)$$

Dan  $Q(x, y) = x^2$ , diperoleh :

$$\Rightarrow x^2 = x^2 + f'(y)$$

$$\Rightarrow f'(y) = 0$$

$$\Rightarrow f(y) = C$$

Dengan demikian penyelesaian umum dari persamaan differensial di atas adalah :

$$\mu(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + x^2y = C \text{ atau } \frac{1}{3}x^3 + x^2y = C \text{ atau } x^3 + 3x^2y = C$$

## b. Persamaan Differensial Linier dan Cara Menyelesaiannya



Lengkapilah titik pada penyelesaian persamaan differensial linier berikut ini:

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 4x$$

$p(x) = -2x$  dan  $q(x) = 4x$  dan merupakan fungsi kontinu,

Jadi, penyelesaian persamaan differensial adalah :

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left( \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right)$$

$$y = e^{\int \dots dx} \left( \int \dots e^{\int \dots dx} dx + C \right)$$

$$\Rightarrow y = e^{x^2} \left( \int 4xe^{-x^2} dx + C \right), \text{ Misalkan } -x^2 = u \Rightarrow -2x dx = du$$

$$\Rightarrow y = e^{x^2} \left( -2 \int e^{-x^2} (\dots) + C \right)$$

$$\Rightarrow y = e^{x^2} \left( -2 \int e^{\dots} d(-x^2) + C \right)$$

$$\Rightarrow y = e^{x^2} \left( -2 \int e^u du + C \right)$$

$$\Rightarrow y = e^{x^2} (\dots + C)$$

$$\Rightarrow y = e^{x^2} (\dots + C)$$

$$\Rightarrow y = -2 + Ce^{-x^2}$$



## c. Persamaan Differensial Bernoulli dan Cara Menyelesaikannya

Lengkapilah titik pada penyelesaian persamaan differensial bernoulli berikut ini:

$$\frac{dy}{dx} - y = xy^5 \Rightarrow n = 5$$

$\frac{dy}{dx} - y = xy^5$  (Bagi dengan  $y^5$ ), diperoleh :

$$y^{-5} \frac{dy}{dx} - y^{-4} = x \dots\dots\dots 1)$$

$$\text{Ambil : } v = \frac{1}{y^4} = y^{-4}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dy} = \dots$$

$$\text{Perhatikan : } \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{-4}{y^5} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-4}{y^5} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^5} \frac{dy}{dx} = \dots \frac{dv}{dx}$$

Selanjutnya substitusi ke persamaan 1), diperoleh :

$$-\frac{1}{4} \frac{dv}{dx} - v = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dx} + 4v = \dots$$

Berarti persamaan differensial berubah menjadi persamaan differensial linier, sehingga penyelesaian umumnya adalah :

$p(x) = 4$  dan  $q(x) = -4x$  dan merupakan fungsi kontinu,

Jadi, penyelesaian persamaan differensial adalah :

$$v = e^{-\int \dots dx} \left( \int -4x e^{\int \dots dx} + C \right)$$

$$\Rightarrow v = e^{-4x} \left( \int (-4x) e^{4x} dx + C \right)$$

$$\Rightarrow v = e^{-4x} \left( \dots \int x e^{4x} dx + C \right)$$

Perhatikan :

$$\text{Ingat : } \int U dV = UV - \int V dU$$

Dimana :  $U = U(x)$  dan  $V = V(x)$

$$\int (\dots) e^{4x} dx = -4 \int x e^{-4x} dx$$

$$\text{misalkan : } u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \int e^{4x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{4} e^{4x}$$

$$\Rightarrow v = e^{-4x} \left( -4 \left[ \frac{1}{4} x e^{4x} - \frac{1}{4} \int e^{4x} dx \right] + C \right)$$

$$\Rightarrow v = e^{-4x} \left( -4 \left[ \frac{1}{4} x e^{4x} - \dots \right] + C \right)$$

$$\Rightarrow v = e^{-4x} \left( \dots + \frac{1}{4} e^{4x} + C \right)$$

$$\Rightarrow v = (\dots) + C e^{-4x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^4} = \left( \frac{1}{4} - x \right) + C e^{-4x}$$



# Persamaan Differensial Faktor Integrasi, Linier, dan Bernoulli

Selesaikanlah persamaan differensial berikut ini dengan mencocokkan antara kolom soal dengan kolom jawabannya!

Soal

1

$$x \frac{dy}{dx} - 2y = x^3 \cos 3x$$

2

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = y^4 x^5$$

3

$$(2x + 2y)dx + 2dy = 0$$

4

$$(x^2 + y) \frac{dy}{dx} = 2xy$$

Jawaban

$$\bullet \quad 2xe^x - 2x + 2ye^x = c$$

$$\bullet \quad \frac{y}{c} = e^{\frac{x^6}{y}}$$

$$\bullet \quad y = \frac{1}{3}x^3 \sin 3x + cx^2$$

$$\bullet \quad y^3 = \frac{1}{-x^6 + Cx^3}$$

## Persamaan Differensial Faktor Integrasi, Linier, dan Bernoulli

Uraikanlah penyelesaian soal nomor 1 Anda pada kolom kotak di bawah ini!

Uraikanlah penyelesaian soal nomor 2 Anda pada kolom kotak di bawah ini!



## Persamaan Differensial Faktor Integrasi, Linier, dan Bernoulli

Uraikanlah penyelesaian soal nomor 3 Anda pada kolom kotak di bawah ini!

Uraikanlah penyelesaian soal nomor 4 Anda pada kolom kotak di bawah ini!