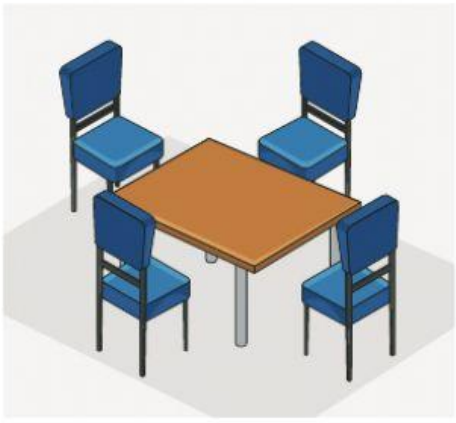
Ayo Mengingat Kembali

- Pola bilangan adalah susunan bilangan yang membentuk pola tertentu.
- Suku ke-1 dilambangkan dengan U_1.
- Suku ke-2 dilambangkan dengan U_2.
- Suku ke-3 dilambangkan dengan U_3.
- Suku ke-n dilambangkan dengan U_n.

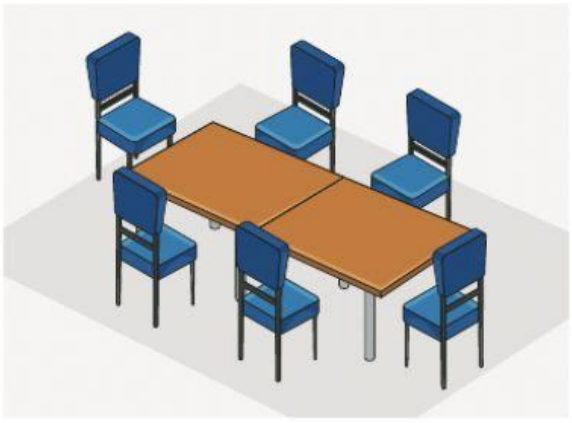
Eksplorasi 2.1 Meja Segi Empat

Ayo Bereksplorasi

Ayo bandingkan banyak meja dan kursi pada kedua gambar di bawah ini. Pada Gambar 2.1, terdapat satu meja berbentuk segiempat yang dilengkapi empat kursi. Jika dua meja disatukan, maka dapat dilengkapi dengan 6 kursi (Gambar 2.2)



Gambar 2.1 Meja Segi Empat dengan Empat Kursi



Gambar 2.2 Dua Meja Segi Empat Disatukan

Ayo Berdiskusi

Jawablah pertanyaan berikut dengan berdiskusi bersama teman kelompokmu.

1. Berapa orang yang dapat duduk di kursi dengan sejumlah meja yang disatukan? Ayo berkolaborasi dengan temanmu dalam mengisi tabel 2.1 untuk menjawab pertanyaan tersebut.

LIVEWORKSHEETS

Tabel 2.1 Banyak Meja dan Kursi

Banyak meja	1	2	3	4	5	6
Banyak kursi	4	6	...	...	...	...

2. Jika terdapat 20 orang yang akan makan bersama dalam satu meja, maka berapa meja yang perlu disatukan? Bagaimana kalian mengetahuinya? Jelaskan jawabanmu.

A. Barisan

Tabel 2.1 menampilkan pola bilangan: 4, 6, 8, 10, ….
Jika diamati lebih teliti, pola bilangan di atas disusun berdasarkan aturan tertentu.
Pola bilangan yang demikian disebut dengan **barisan bilangan.**
Terdiri dari berapa suku barisan bilangan tersebut?

- Suku ke-1 dilambangkan dengan U_1= ...
- Suku ke-2 dilambangkan dengan U_2= ...
- Suku ke-3 dilambangkan dengan U_3= ...
- Suku ke-4 dilambangkan dengan U_4= ...
- Suku ke-n dilambangkan dengan U_n

Sehingga, barisan bilangan dapat dinyatakan dalam **bentuk umum**, yaitu
$U_1, U_2, U_3, U_4, \ldots\ldots\ldots\ldots, U_n$.

1. Barisan Aritmatika

- Selanjutnya, aturan apa yang ada pada barisan bilangan pada Tabel 2.1?
- Operasi penghitungan apa yang ada di antara suku-suku pada barisan bilangan di atas?



- Berapakah beda atau selisih antara dua suku yang berdekatan?

  $U_2 - U_1 = \ldots - \ldots = \ldots$

  $U_3 - U_2 = \ldots - \ldots = \ldots$

  $U_4 - U_3 = \ldots - \ldots = \ldots$

- Apakah beda atau selisih antara dua suku yang berdekatan selalu sama?

LIVEWORKSHEETS

Suatu barisan dengan beda atau selisih antara dua suku berurutan selalu tetap atau konstan disebut BARISAN ARITMETIKA. Beda pada barisan aritmetika dilambangkan dengan b.

Seperti yang telah diuraikan di atas, untuk mencari beda dapat dilakukan dengan cara mengurangkan dua suku yang berurutan sehingga dapat dituliskan sebagai berikut.

$b = U_2 - U_1$

$b = U_3 - U_2$

$b = U_4 - U_3$ dan seterusnya.

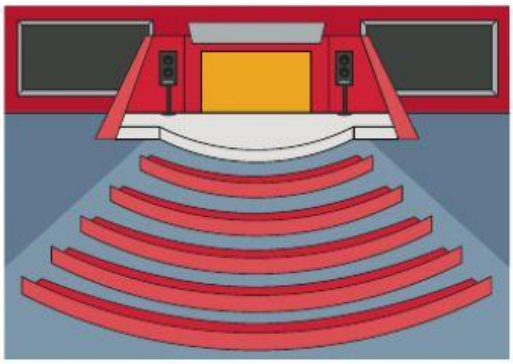
Jadi, beda pada barisan aritmetika dapat dinyatakan dengan $b = U_n - U_{(n-1)}$

Eksplorasi 2.2 Gedung Pertunjukan Seni

Ayo Bereksplorasi

Ayo cermati banyak kursi di tiap baris pada gedung pertunjukkan seni yang tampak pada **Gambar 2.3:**

Baris ke-1 = 20
Baris ke-2 = 24
Baris ke-3 = 28
Baris ke-4 = 32
Baris ke-5 = 36



Gambar 2.3 Gedung Pertunjukan Seni

Berapakah jumlah kursi pada bariske-15?

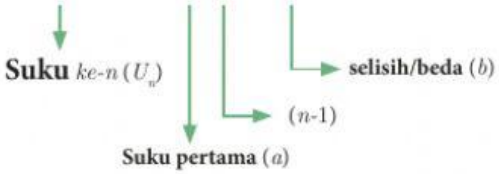
Untuk menentukan banyak kursi pada baris ke-15, sebelumnya kalian amati terlebih dahulu banyak kursi di tiap baris.

- Berapa beda atau selisih banyak kursi pada tiap baris?
- Baris ke-1 = 20
- Baris ke-2 = 24 = 20+ ... (20 ditambah ... sebanyak ... kali)
  = 20 + (… × …)
- Baris ke-3 = 28 = 20 + ... + ... (20 ditambah ... sebanyak ... kali)
  = 20 + (… × …)

LIVEWORKSHEETS

- Baris ke-4 = 32 = 20 + ... +... +... (20 ditambah ... sebanyak ... kali)
  = 20 + (… × …)
- Baris ke-5 = 36 = 20 + ... + ... + ... +... (20 ditambah ... sebanyak ... kali)
  = 20 + (… × …)
- Jadi, pada baris ke-15 = 20 ditambah … sebanyak …. kali
  = 20 + (… × …) = ...

Baris ke-15 = 20 + (… × …) = ...



Jadi, rumus umum menentukan suku ke-n pada barisan aritmetika adalah:

$$U_n = a + (n - 1)\, b$$

Keterangan:

U_n = **suku** ke-n a = **suku pertama** n = **nomor suku** b = **beda**

Contoh:

1. Diketahui suatu barisan aritmetika, suku ke-3 = 9, suku ke-6 = 18. Tentukan rumus suku ke-n.

   Alternatif penyelesaian:

$$\begin{aligned} U_3 &= a + 2b = 9 \\ U_6 &= a + 5b = 18 \\ \hline -3b &= -9 \\ b &= \frac{-9}{-3} \\ b &= 3 \\ a + 2b &= 9 \\ a + 2(3) &= 9 \\ a + 6 &= 9 \\ a &= 9 - 6 \\ a &= 3 \end{aligned}$$

LIVEWORKSHEETS

Rumus suku $ke\text{-}n$:

$$U_n = a + (n-1)b$$
$$U_n = 3 + (n-1)3$$
$$= 3 + 3n - 3$$
$$U_n = 3n$$

Jadi, rumus suku $ke\text{-}n$ dari barisan tersebut adalah $U_n = 3_n$

2. Rudi menabung di bank dengan selisih kenaikan nominal uang yang ditabung antarbulan tetap. Jika pada bulan ke-5, nominal uang yang ditabung Rp70.000,00 dan pada bulan ke-9 Rudi menabung sebesar Rp90.000,00.
   a. Berapa rupiah selisih nominal uang yang ditabung antarbulan?
   b. Tentukan berapa rupiah uang yang ditabung Rudi untuk pertama kalinya?

Alternatif Penyelesaian:

$$U_5 = 70.000$$
$$a + (5-1)b = 70.000$$
$$a + 4b = 70.000 \text{ ... (persamaan 1)}$$
$$U_9 = 90.000$$
$$a + (9-1)b = 90.000$$
$$a + 8b = 90.000 \text{ ... (persamaan 2)}$$

Eliminasi Persamaan 1 dan 2

$$a + 8b = 90.000$$
$$a + 4b = 70.000 \;\underline{-}$$
$$4b = 20.000$$
$$b = 5.000$$

b adalah beda atau selisih.

Jadi, selisih nominal uang yang ditabung Rudi antarbulan adalah Rp5.000,00.

Selanjutnya, menentukan uang yang ditabung Rudi pertama kali, yaitu menentukan suku pertama yang dilambangkan dengan a dengan bantuan nilai b (beda) yang telah diketahui.

Gunakan persamaan 1, lalu substitusi nilai b (beda) yang telah diperoleh.

LIVEWORKSHEETS

$$a + 4b = 70.000$$
$$a + 4(5.000) = 70.000$$
$$a + 20.000 = 70.000$$
$$a = 70.000 - 20.000$$
$$a = 50.000$$

a adalah suku pertama.

Jadi, uang yang ditabung Rudi untuk pertama kalinya adalah sebesar Rp50.000,00.

Penjelasan di atas menggunakan Persamaan 1 untuk menentukan suku pertama. Bagaimana jika menggunakan Persamaan 2? Apakah hasilnya akan sama?



Latihan 2.1

1. Tuliskan dua suku berikutnya dari barisan bilangan di bawah ini.
   a. 8, 5, 2, -1, …
   b. 2, 3, 5, 8,
   c. -15, -11, -7, …
   d. …10, 8, 4, -2, …

   Pertanyaan singkat di bawah ini dapat membantu kalian dalam menjawab soal nomor 1.
   - Apakah barisan di atas barisan aritmetika?
   - Jika iya, berapa beda dari barisan tersebut? Lalu, tentukan dua suku berikutnya dari barisan di atas.
   - Jika tidak, maka aturan apa yang terdapat pada barisan bilangan tersebut?
2. Tentukan suku ke-50 dari barisan berikut: 5, –2, –9, –16, …

   Pertanyaan singkat di bawah ini dapat membantu kalian dalam menjawab soal nomor 2.
   - Berapa beda pada barisan tersebut?
   - $U_n = a + (n - 1)b$

   Maka, suku ke $- 50 = U_{50} = \cdots$

LIVEWORKSHEETS

3. Jika ada 4 orang, berapa banyak jabat tangan yang terjadi? ……..
4. Berapa total siswa dalam kelompokmu, dan berapa banyak jabat tangan yang terjadi? Bagaimana kalian mengetahuinya? ……..

Ayo Berpikir Kritis

Apakah banyak jabat tangan di atas membentuk barisan? Jelaskan jawabanmu.

Dari Eksplorasi 2.5, banyak jabat tangan yang terjadi dapat dinyatakan sebagai berikut.

Tabel 2.3 Banyak Jabat Tangan yang Terjadi di Kelas

Banyaknya orang yang hadir	Banyak jabat tangan	Uraian dari banyak jabat tangan
Dua orang	1	1
Tiga orang	3	1 + 2
Empat orang	..	1 + … + …
Lima orang	…	1 + … + … + …

- Apakah uraian dari jumlah jabat tangan merupakan bentuk penjumlahan dari barisan bilangan?

Bentuk penjumlahan dari barisan bilangan akan membentuk deret bilangan.
Jadi, **deret bilangan adalah jumlah suku-suku penyusun barisan bilangan**.
Deret bilangan, terdiri dari deret aritmetika dan deret geometri.

1. Deret Aritmetika



Gambar 2.7
CARL FRIEDRICH GAUSS
Sumber: shorturl.at/auOW0

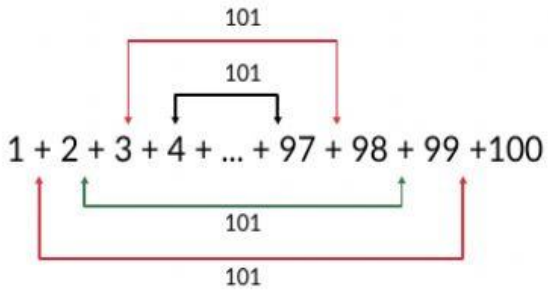
Tahukah Kalian?

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) adalah seorang matematikawan Jerman yang telah menunjukkan bakatnya sejak kecil. Ketika duduk di kelas 4 SD, guru matematikanya memberikan soal berupa penjumlahan bilangan 1 + 2 + 3 + 4+ … … … + 98 + 99 + 100 = ⋯

Tidak membutuhkan waktu yang lama, Gauss yang saat itu masih berusia 10 tahun langsung menjawab "5050".

LIVEWORKSHEETS

Berikut cara Gauss menyelesaikan penjumlahan bilangan tersebut.



Ia mengelompokkan suku-suku pada deret tersebut sehingga memiliki nilai yang sama ketika dijumlahkan.

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+98+99+100 &= (1+100)+(2+99)+\cdots+(50+51) \\ &= \underbrace{101+101+\cdots+101}_{50\times} \\ &= 50\times 101 \\ &= 5050 \end{aligned}$$

Sekarang, ayo cermati kembali deret bilangan di atas.

1 + 2 + 3 + 4 +..... + 98 + 99 + 100 = ⋯

- Apakah bilangan pada deret di atas membentuk barisan?
- Barisan apakah yang dibentuk dari suku-suku pada deret di atas?

Deret aritmetika adalah suatu deret yang diperoleh dari menjumlahkan suku-suku pada barisan aritmetika.

Dari barisan aritmetika: $U_1, U_2, U_3, U_4, \ldots\ldots\ldots, Un$.
Dapat dibentuk deret aritmetika: $U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \ldots\ldots\ldots + U_{10}$

$$\begin{aligned} U_1 &= a & U_6 &= a+5b \\ U_2 &= a+b & U_7 &= a+6b \\ U_3 &= a+2b & U_8 &= a+7b \\ U_4 &= a+3b & U_9 &= a+8b \\ U_5 &= a+4b & U_{10} &= a+9b \end{aligned}$$

Jumlah 4 suku pertama deret aritmetika: S_4

$$\begin{aligned} S_4 &= U_1+U_2+U_3+U_4 \\ &= a+(a+b)+(a+2b)+(a+3b) \\ &= 4a+6b \\ &= 2(2a+3b) \\ S_4 &= \frac{4}{2}(2a+(4-1)b) \end{aligned}$$

LIVEWORKSHEETS

Jumlah 10 suku pertama deret aritmetika: S_{10}

$$\begin{aligned} S_{10} &= U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \cdots + U_{10} \\ &= a + (a+b) + (a+2b) + (a+3b) + (a+4b) + (a+5b) \\ &\quad + (a+6b) + (a+7b) + (a+8b) + (a+9b) \\ &= 10a + 45b \\ &= 5(2a+9b) \\ S_{10} &= \frac{10}{2}(2a + (10-1)b) \end{aligned}$$

Jumlah 4 suku pertama deret aritmetika	Jumlah 10 suku pertama deret aritmetika
$S_4 = \frac{4}{2}(2a + (4-1)b)$	$S_{10} = \frac{10}{2}(2a + (10-1)b)$

Dari kedua contoh di atas, maka dapat disimpulkan bahwa rumus Jumlah n suku pertama deret aritmetika:

$$\begin{aligned} S_n &= U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n \\ &= a + (a+b) + (a+2b) + \cdots + (a + (n-1)b) \end{aligned}$$

Penjumlahan deret aritmetika dibalik dari U_1 menuju U_n menjadi U_n menuju U_1

$$\begin{aligned} S_n &= (a + (n-1)b) + (a + (n-2)b) + \cdots + (a+b) + a \\ S_n &= a + (a+b) + (a+2b) + \cdots + (a + (n-2)b) + (a + (n-1)b) \\ \hline 2S_n &= \underbrace{(2a + (n-1)b) + (2a + (n-1)b) + \cdots + (2a + (n-1)b)}_{n\times} \\ 2S_n &= n(2a + (n-1)b) \\ S_n &= \frac{n}{2}(2a + (n-1)b) \\ S_n &= \frac{n}{2}(a + [a + (n-1)b]) \\ S_n &= \frac{n}{2}(a + U_n) \end{aligned}$$

$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)$ Karena, $U_n = a + (n-1)b$

$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$

LIVEWORKSHEETS