

Nama :

Kelas :

1. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku $\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$!

Pembuktian:

➤ Langkah awal (I)

$$\begin{aligned}\text{Untuk } n = 1 &\Rightarrow (2(\dots) - 1) = (\dots)^2 \\ (\dots - \dots) &= \dots \\ \dots &= \dots\end{aligned}$$

➤ Langkah induksi

Langkah II:

$$\begin{aligned}n = k &\Rightarrow \sum_{i=1}^n (2(\dots) - 1) = (\dots)^2 \\ \sum_{i=1}^n 2 \dots - 1 &= \dots^2\end{aligned}$$

➤ Langkah induksi

Langkah III:

$$\begin{aligned}n = k + 1 &\Rightarrow \sum_{i=1}^n (2k - 1) + ((2(\dots \dots)) - 1) = (\dots \dots)^2 \\ \dots^2 + (\dots + \dots - \dots) &= (\dots^2 + \dots + \dots) \\ \dots^2 + \dots + \dots &= \dots^2 + \dots + \dots\end{aligned}$$

2. Diketahui barisan bilangan dibentuk mengikuti aturan $U_{n+1} = 3U_n - 2U_{n-1}$ dengan $U_1 = 2$ dan $U_2 = 3$.

Tentukan:

a. U_3, U_4 , dan U_5

b. Tentukan dugaan rumus suku ke- n

c. Buktikan rumus suku ke- n yang diperoleh pada soal (b) dengan menggunakan induksi matematika!

Penyelesaian:

a. Diketahui $U_{n+1} = 3U_n - 2U_{n-1}$ dengan $U_1 = 2$ dan $U_2 = 3$.

➤ Untuk $n = 2$, diperoleh $U_3 = 3U_2 - 2U_1 = 3(\dots) - 2(\dots) = \dots$

➤ Untuk $n = 3$, diperoleh $U_4 = 3U_3 - 2U_2 = 3(\dots) - 2(\dots) = \dots$

➤ Untuk $n = 4$, diperoleh $U_5 = 3U_4 - 2U_3 = 3(\dots) - 2(\dots) = \dots$

b. Berdasarkan hasil pada (a), dapat diduga bahwa $U_n = 2^{n-1} + 1$. Dugaan ini mungkin saja salah. Oleh karena itu, kita akan mengujinya pada soal (c).

c. Kita akan membuktikan $U_n = 2^{n-1} + 1$ dengan menggunakan induksi matematika.

(i) Untuk $n = 1 \Rightarrow U_1 = 2^{\dots-1} + 1 = \dots + \dots = \dots$

(ii) Anggap rumus tersebut berlaku untuk $n = 1, 2, 3, \dots, k$ sehingga diperoleh:

$$U_1 = 2^{1-1} + 1, \quad U_2 = 2^{2-1} + 1, \dots, U_{k-1} = 2^{k-2} + 1, \quad U_k = 2^{k-1} + 1$$

Selanjutnya, kita akan membuktikan bahwa rumus tersebut berlaku untuk $n = k + 1$ atau kita harus membuktikan bahwa:

$$U_{k+1} = 2^k + 1$$

Untuk itu, dengan menggunakan rumus $U_{n+1} = 3U_n - 2U_{n-1}$ untuk $n + 1 = k + 1$ maka :

$$\begin{aligned}U_{k+1} &= 3U_k - 2U_{k-1} \\ &= 3(\dots + \dots) - 2(\dots + 1) \\ &= 3 \dots + \dots - 2 \dots - \dots \\ &= 3 \dots - 2 \dots + \dots \\ &= 2 \dots (\dots - \dots) + \dots \\ &= 2 \dots^2 + \dots \\ &= 2 \dots + \dots\end{aligned}$$

Berdasarkan (i) dan (ii), maka terbukti $U_n = 2^{\dots-1} + \dots$