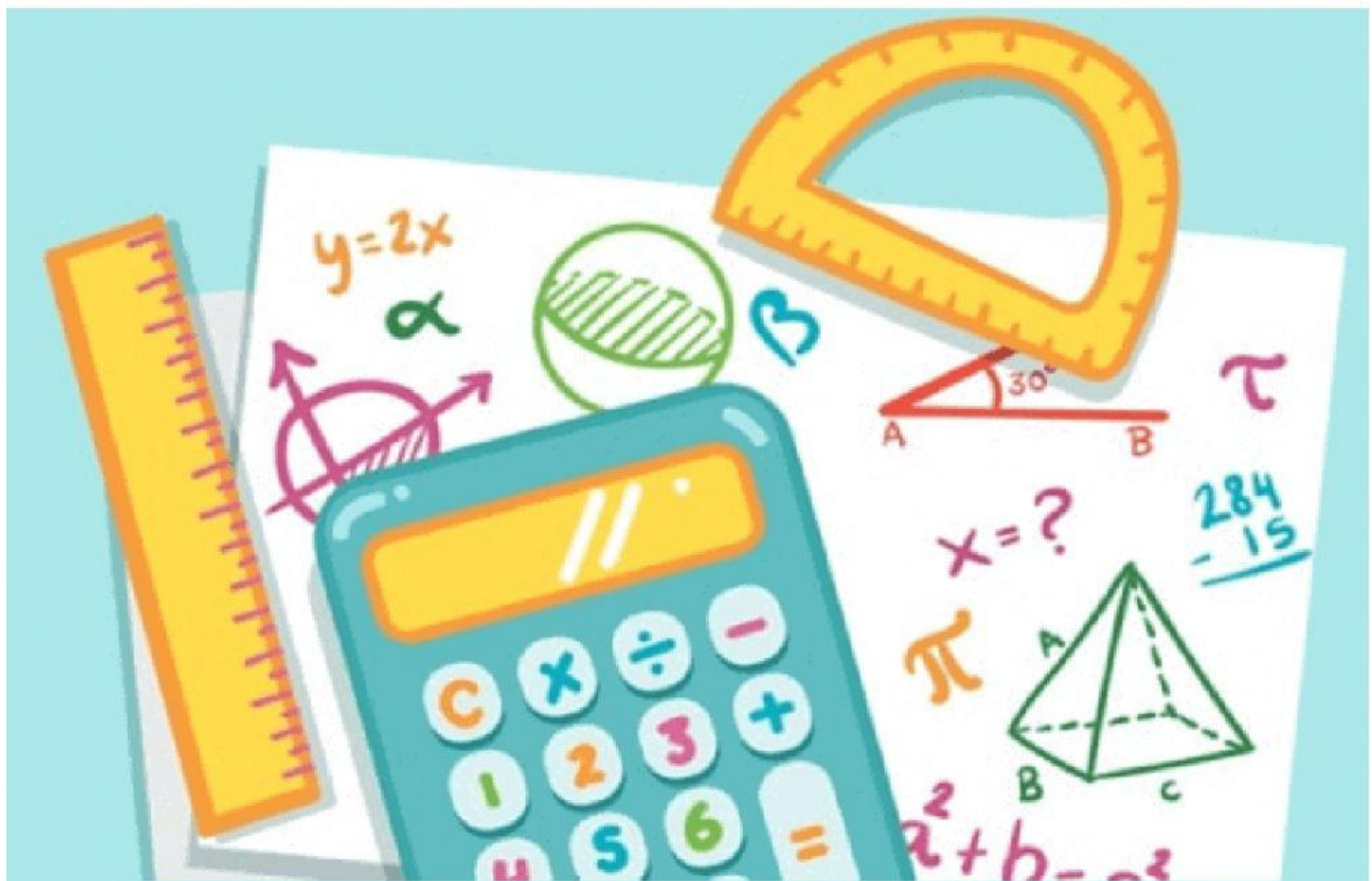


LEMBAR KERJA PESERTA DIDIK (LKPD)

RUMUS-RUMUS DALAM TRIGONOMETRI BAGIAN 1



Disusun Oleh :

1. Lutfiah Husnah

2. Wiwit Rizqiani Tsania

(2001062006)

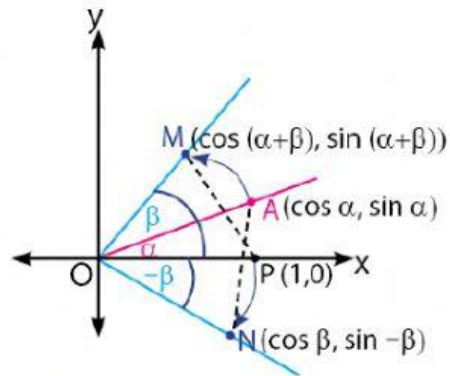
(2001060019)



LEMBAR KERJA PESERTA DIDIK

HARI/TANGGAL : KAMIS, 12 MEI 2022

NAMA : _____
NPM : _____
PRODI : TADRIS MATEMATIKA
KELAS/SEMESTER : A/4
MATA KULIAH : TRIGONOMETRI



Materi Pembelajaran

1. Rumus Trigonometri untuk Jumlah Dua Sudut dan Selisih Dua Sudut
2. Rumus Trigonometri untuk Sudut Rangkap
3. Rumus Trigonometri untuk Sudut Pertengahan
4. Penggunaan Rumus-rumus Trigonometri untuk Jumlah dan Selisih Dua Sudut; Sudut Rangkap; dan sudut Pertengahan dalam Penyelesaian Identitas Trigonometri

Indikator Pencapaian Kompetensi

Peserta didik dapat :

1. Memahami rumus-rumus trigonometri jumlah dan selisih dua sudut
2. Memahami rumus trigonometri sudut rangkap
3. Memahami rumus trigonometri sudut pertengahan
4. Memahami penggunaan rumus-rumus trigonometri untuk jumlah dan selisih dua sudut; sudut rangkap; dan sudut pertengahan dalam penyelesaian identitas trigonometri

Tujuan Pembelajaran

Peserta didik dapat :

1. Menentukan rumus sinus jumlah dan selisih dua sudut
2. Menentukan rumus cosinus jumlah dan selisih dua sudut
3. Menentukan rumus tangen jumlah dan selisih dua sudut
4. Menentukan rumus sinus sudut rangkap
5. Menentukan rumus cosinus sudut rangkap
6. Menentukan rumus tangen sudut rangkap
7. Menentukan rumus sinus sudut pertengahan
8. Menentukan rumus cosinus sudut pertengahan
9. Menentukan rumus tangen sudut pertengahan
10. Menggunakan rumus-rumus trigonometri untuk jumlah dan selisih dua sudut; sudut rangkap; dan sudut pertengahan dalam penyelesaian identitas trigonometri

Petunjuk Belajar

Pahamilah konsep materi yang diberikan dan lengkapi contoh soal di bawahnya!

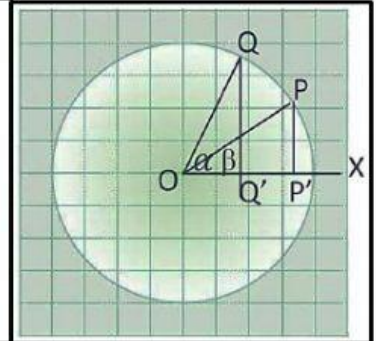
AKTIVITAS 1

Rumus untuk $\cos(\alpha - \beta)$ dan $\cos(\alpha + \beta)$

Gambar di samping menunjukkan lingkaran satuan dengan titik $P(x_1, y_1)$ dan titik $Q(x_2, y_2)$ berada pada lingkaran. Misalkan $\angle XOQ = \alpha$ dan $\angle XOP = \beta$, maka $\angle POQ = \alpha - \beta$.

Perhatikan $\triangle OPP'$:

$$\left. \begin{aligned} \sin \beta &= \frac{PP'}{OP} = \frac{y_1}{r} \rightarrow y_1 = r \sin \beta \\ \cos \beta &= \frac{OP'}{OP} = \frac{x_1}{r} \rightarrow x_1 = r \cos \beta \end{aligned} \right\} P(r \cos \beta, r \sin \beta)$$



Perhatikan $\triangle OQQ'$:

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{QQ'}{OQ} = \frac{y_2}{r} \rightarrow y_2 = r \sin \alpha \\ \cos \alpha &= \frac{OQ'}{OQ} = \frac{x_2}{r} \rightarrow x_2 = r \cos \alpha \end{aligned} \right\} Q(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$$

Panjang PQ dapat dicari dengan rumus jarak, yaitu :

$$PQ^2 = (r \cos \alpha - r \cos \beta)^2 + (r \sin \alpha - r \sin \beta)^2$$

Berdasarkan aturan cosinus, maka :

$$PQ^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos(\alpha - \beta) \dots (1)$$

$$PQ^2 = OQ^2 + OP^2 - 2 OQ \cdot OP \cos \angle POQ \quad \rightarrow PQ^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos(\alpha - \beta) \dots (2)$$

Persamaan (1) = (2), sehingga diperoleh :

$$2r^2 - 2r^2 \sin \alpha \sin \beta - 2r^2 \cos \alpha \cos \beta = 2r^2 - 2r^2 \cos(\alpha - \beta)$$

...

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \dots (3)$$

Dengan mensubstitusikan $-\beta$ ke persamaan (3), maka diperoleh :

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos[\alpha - (-\beta)]$$

...

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \dots (4)$$

Contoh :

Dengan menggunakan rumus yang telah dipelajari, hitunglah tanpa menggunakan tabel dan kalkulator $\cos 15^\circ$!

Penyelesaian :

$$\cos 15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ)$$

$$\cos 15^\circ = \cos \quad^\circ \cos \quad^\circ + \sin \quad^\circ \sin \quad^\circ$$

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\cos 15^\circ = \frac{1}{2} (\sqrt{3} + 1) \quad \therefore \text{Jadi, } \cos 15^\circ = \frac{1}{2} (\sqrt{3} + 1) .$$

Rumus untuk $\sin(\alpha + \beta)$ dan $\sin(\alpha - \beta)$

Dengan menggunakan rumus sudut berelasi : $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ dan $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, maka dapat diperoleh :

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos[90^\circ - (\alpha + \beta)]$$

:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \dots (5)$$

Dan, dengan mensubstitusikan $-\beta$ ke persamaan (5), maka diperoleh :

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin[\alpha + (-\beta)]$$

:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \dots (6)$$

Contoh :

Dengan menggunakan rumus yang telah dipelajari, hitunglah tanpa menggunakan tabel dan kalkulator $\sin 75^\circ$!

Penyelesaian :

$$\sin 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ)$$

$$\sin 75^\circ = \sin \underline{\hspace{1cm}}^\circ \cos \underline{\hspace{1cm}}^\circ + \cos \underline{\hspace{1cm}}^\circ \sin \underline{\hspace{1cm}}^\circ$$

$$\sin 75^\circ = \underline{\hspace{1cm}} \sqrt{\underline{\hspace{1cm}}} \cdot \underline{\hspace{1cm}} \sqrt{\underline{\hspace{1cm}}} + \underline{\hspace{1cm}} \sqrt{\underline{\hspace{1cm}}} \cdot \underline{\hspace{1cm}}$$

$$\sin 75^\circ = \underline{\hspace{1cm}} \sqrt{\underline{\hspace{1cm}}} + \underline{\hspace{1cm}} \sqrt{\underline{\hspace{1cm}}}$$

$$\sin 75^\circ = \underline{\hspace{1cm}} (\sqrt{\underline{\hspace{1cm}}} + \sqrt{\underline{\hspace{1cm}}}) \quad \therefore \text{Jadi, } \sin 75^\circ = \underline{\hspace{1cm}} (\underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}}) .$$

Rumus untuk $\tan(\alpha + \beta)$ dan $\tan(\alpha - \beta)$

Dengan menggunakan rumus identitas trigonometri : $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, maka dapat diperoleh :

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta} \rightarrow \text{bagi pembilang dan penyebut dengan } \cos \alpha \cos \beta$$

:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \dots (7)$$

Dan, dengan mensubstitusikan $-\beta$ ke persamaan (7), maka diperoleh :

$$\tan(\alpha - \beta) = \tan[\alpha + (-\beta)]$$

:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \dots (8)$$

Contoh :

Tentukan nilai dari $\frac{\tan 23^\circ + \tan 37^\circ}{1 - \tan 23^\circ \cdot \tan 37^\circ}$!

Penyelesaian :

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

$$\frac{\tan 23^\circ + \tan 37^\circ}{1 - \tan 23^\circ \cdot \tan 37^\circ} = \tan(\underline{\quad}^\circ + \underline{\quad}^\circ) = \tan \underline{\quad}^\circ = \sqrt{\underline{\quad}}$$

$$\text{Jadi, nilai dari } \tan \underline{\quad}^\circ = \sqrt{\underline{\quad}}.$$

AKTIVITAS 2**Rumus Trigonometri untuk Sudut Rangkap**❖ Rumus untuk $\sin 2\alpha$

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha)$$

$$\sin 2\alpha = \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

❖ Rumus untuk $\cos 2\alpha$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha)$$

$$\cos 2\alpha = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

❖ Rumus untuk $\tan 2\alpha$

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha)$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \alpha}$$

Contoh :

1. Dimisalkan: A adalah sudut di kuadran II dan $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, maka hitunglah:

- a. $\sin 2\alpha$ b. $\cos 2\alpha$

Penyelesaian :

$$\text{Jika } \sin \alpha = \frac{4}{5}, \text{ maka } \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

a. $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

$$= \underline{\quad} \cdot \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

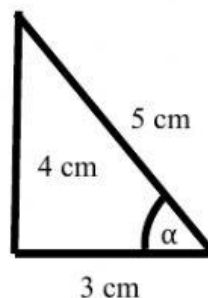
$$= \underline{\quad}$$

b. $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

$$= \left(\underline{\quad}\right)^2 - \left(\underline{\quad}\right)^2$$

$$= \underline{\quad} - \underline{\quad}$$

$$= \underline{\quad}$$



2. Hitunglah nilai dari $\frac{2 \tan 67,5^\circ}{1 - \tan^2 67,5^\circ}$!

Penyelesaian :

$$\tan 2\alpha = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \alpha}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \rightarrow \frac{2 \tan 67,5^\circ}{1 - \tan^2 67,5^\circ} = \tan \underline{\quad} (\underline{\quad}, \underline{\quad}^\circ) = \tan \underline{\quad}^\circ$$

$$\tan \underline{\quad}^\circ = \tan(180^\circ - 45^\circ) \rightarrow -\tan \underline{\quad}^\circ = -\underline{\quad}$$

AKTIVITAS 3

Rumus untuk $\sin \frac{1}{2} \alpha$

Untuk menentukan rumus $\sin \frac{1}{2} \alpha$, maka perhatikan rumus sudut rangkap trigonometri berikut.

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

Dengan mensubstitusikan nilai $\alpha = \frac{1}{2} \theta$ ke dalam $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$, maka akan didapatkan:

$$\sin^2 \frac{1}{2} \theta = \frac{1 - \cos 2(\frac{1}{2} \theta)}{2} \quad \Leftrightarrow \sin^2 \frac{1}{2} \theta = \frac{1 - \cos \theta}{2} \quad \Leftrightarrow \sin \frac{1}{2} \theta = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

Rumus untuk $\cos \frac{1}{2} \alpha$

Untuk menentukan rumus $\cos \frac{1}{2} \alpha$, maka perhatikan rumus sudut rangkap trigonometri berikut.

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

Dengan mensubstitusikan nilai $\alpha = \frac{1}{2} \theta$ ke dalam $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$, maka akan didapatkan:

$$\cos^2 \frac{1}{2} \theta = \frac{1 + \cos 2(\frac{1}{2} \theta)}{2} \quad \Leftrightarrow \cos^2 \frac{1}{2} \theta = \frac{1 + \cos \theta}{2} \quad \Leftrightarrow \cos \frac{1}{2} \theta = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

Rumus untuk $\tan \frac{1}{2} \alpha$

Untuk menentukan rumus $\tan \frac{1}{2} \alpha$, maka perhatikan rumus identitas trigonometri berikut.

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Dengan mensubstitusikan nilai $\alpha = \frac{1}{2} \theta$ ke dalam $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, maka akan didapatkan:

$$\tan \frac{1}{2} \theta = \frac{\sin \frac{1}{2} \theta}{\cos \frac{1}{2} \theta} \quad \Leftrightarrow \tan \frac{1}{2} \theta = \frac{\pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}}{\pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}} \quad \Leftrightarrow \tan \frac{1}{2} \theta = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} \quad \Leftrightarrow \tan \frac{1}{2} \theta = \pm \frac{\sqrt{1 - \cos \theta}}{\sqrt{1 + \cos \theta}}$$

Adapun, jika kita uraikan rumus di atas tersebut, maka akan menghasilkan bentuk lain dari rumus $\tan \frac{1}{2} \theta$, yaitu:

$$\Leftrightarrow \tan \frac{1}{2} \theta = \pm \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \quad \text{dan} \quad \Leftrightarrow \tan \frac{1}{2} \theta = \pm \frac{\sin \theta}{(1 + \cos \theta)}$$

Catatan :

- Tanda (+) dari $\sin \frac{1}{2} \theta$ digunakan untuk sudut-sudut yang berada pada kuadran I dan kuadran II, sedangkan tanda (-) digunakan untuk sudut-sudut yang berada pada kuadran III dan kuadran IV.
- Tanda (+) dari $\cos \frac{1}{2} \theta$ digunakan untuk sudut-sudut yang berada pada kuadran I dan kuadran IV, sedangkan tanda (-) digunakan untuk sudut-sudut yang berada pada kuadran II dan kuadran III.
- Tanda (+) dari $\tan \frac{1}{2} \theta$ digunakan untuk sudut-sudut yang berada pada kuadran I dan kuadran III, sedangkan tanda (-) digunakan untuk sudut-sudut yang berada pada kuadran II dan kuadran IV.

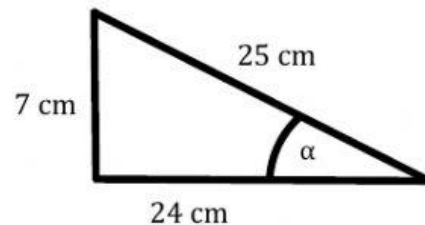
Contoh :

Jika diketahui $\tan \alpha = \frac{7}{24}$ dan berada pada kuadran III, maka hitunglah nilai dari:

- a) $\sin \frac{1}{2} \alpha$
- b) $\cos \frac{1}{2} \alpha$
- c) $\tan \frac{1}{2} \alpha$

Penyelesaian :

$$\tan \alpha = \frac{7}{24} \quad \sin \alpha = \frac{7}{25} \quad \cos \alpha = \frac{24}{25}$$



$$\begin{aligned} \text{a) } \sin \frac{1}{2} \alpha &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{24}{25}}{2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{\frac{1}{25}}{2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{1}{50}} \\ &= \pm \frac{1}{\sqrt{50}} \\ &= \pm \frac{1}{5\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Karena α berada pada kuadran III, maka nilai dari $\sin \frac{1}{2} \alpha = -\frac{1}{5\sqrt{2}}$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos \frac{1}{2} \alpha &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{1 + \frac{24}{25}}{2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{\frac{49}{25}}{2}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{49}{50}} \\ &= \pm \frac{7}{\sqrt{50}} \\ &= \pm \frac{7}{5\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Karena α berada pada kuadran III, maka nilai dari $\cos \frac{1}{2} \alpha = -\frac{7}{5\sqrt{2}}$.

$$\text{c) } \tan \frac{1}{2} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{-\pm}{\pm}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{\pm}{\pm}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{\pm}{\pm}}$$

$$= \pm \frac{\pm}{\pm}$$

Karena α berada pada kuadran III, maka nilai dari $\tan \frac{1}{2} \alpha = \frac{\pm}{\pm}$.

AKTIVITAS 4

Penggunaan Rumus-rumus Trigonometri bagian 1

Buktikan bahwa $\frac{\cos \beta + \sin \beta}{\cos \beta - \sin \beta} - \frac{\cos \beta - \sin \beta}{\cos \beta + \sin \beta} = 2 \tan 2\beta$!

Penyelesaian:

$$\frac{\cos \beta + \sin \beta}{\cos \beta - \sin \beta} - \frac{\cos \beta - \sin \beta}{\cos \beta + \sin \beta} = \frac{(\quad)(\quad) - (\quad)(\quad)}{(\quad)(\quad)}$$

$$= \frac{(\quad) - (\quad)}{(\quad)}$$

$$= \frac{(\quad) - (\quad)}{(\quad)}$$

$$= \frac{(\quad) - (\quad)}{(\quad)}$$

$$= \frac{(\quad) - (\quad)}{(\quad)}$$

$$= \frac{\quad}{\quad}$$

$$= \frac{\quad}{\quad}$$

$$= 2 \tan 2\beta$$

Jadi, terbukti bahwa $\frac{\cos \beta + \sin \beta}{\cos \beta - \sin \beta} - \frac{\cos \beta - \sin \beta}{\cos \beta + \sin \beta} = 2 \tan 2\beta$.

DRAG FROM
BELOW !

$1 + 2 \sin \beta \cos \beta$	$\cos \beta + \sin \beta$	$\cos \beta - \sin \beta$	$\cos^2 \beta + 2 \sin \beta \cos \beta + \sin^2 \beta$
$\cos^2 \beta - 2 \sin \beta \cos \beta + \sin^2 \beta$	$\cos \beta - \sin \beta$	$\cos \beta + \sin \beta$	$1 - 2 \sin \beta \cos \beta$
$\cos \beta - \sin \beta$	$\cos^2 \beta - \sin^2 \beta$	$\cos^2 \beta - \sin^2 \beta$	$1 + \sin 2\beta$
$1 - \sin 2\beta$	$1 + \sin 2\beta$	$1 + \sin 2\beta$	$2 \sin 2\beta$
			$\cos 2\beta \cos^2 \beta - \sin^2 \beta$