# KỸ THUẬT HẰNG SỐ HÓA TRONG TÍNH TÍCH PHÂN

Nguyễn Duy Chiến – Admin Toán học Bắc Trung Nam

**Bài 1.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(x)=x^3+\int_0^1 x^3 f(x^2)\mathrm{d}x$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

**Phân tích bài toán**

Với bài toán trên, các em sẽ thấy rất lạ lẫm bởi vì không thể thực hiên theo quy trình đã gặp ở bài trước. Không thể dùng bảng nguyên hàm, đổi biến khá khó khăn và dùng tích phân từng phần thì hầu như không thể.

Nhưng nhận xét rằng, với hàm số $f(x)$ bất kì, ta có $\int_0^1 x^3 f(x^2)\mathrm{d}x$ luôn là một số thực.

Do đó ta có cách giải như sau: đặt $m=\int_0^1 x^3 f(x^2)\mathrm{d}x$, từ đó có thể tìm được $m$ theo cách giải dưới đây!

**Lời giải**

Đặt $m=\int_0^1 x^3 f(x^2)\mathrm{d}x$ ta được $f(x)=x^3+m$ suy ra $f(x^2)=(x^2)^3+m$

Do đó $m=\int_0^1 x^3 f(x^2)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^3(x^6+m)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^{10}}{10}+\frac{mx^4}{4}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{10}+\frac{m}{4}$

$\Leftrightarrow m-\frac{m}{4}=\frac{1}{10}\Leftrightarrow \frac{3m}{4}=\frac{1}{10}\Leftrightarrow m=\frac{2}{15}$

Suy ra $f(x)=x^3+\frac{2}{15}$

Vậy $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x^3+\frac{2}{15}\right)\mathrm{d}x=\frac{23}{60}$

**BÀI TẬP TỰ LUẬN**

**Bài 2.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(x)=x^4+\int_0^1 xf(x^3)\mathrm{d}x$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

**Bài 3.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(x)=x^2+\int_0^1 x^3 f(x)\mathrm{d}x$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

LIVEWORKSHEETS

**Bài 4.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(x)=x+\int_0^1 x^3 f(x^3)\mathrm{d}x$. Tính tích phân $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

**Bài 5.** (GK2 Bảo Thắng 3 Lào cai 2022) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa màn $f(x)=2x^2-3+\int_0^1 xf\left(\sqrt{1+3x^2}\right)\mathrm{d}x$. Tính tích phân $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

**Bài 6.** (GK2 Bảo Thắng 3 Lào cai 2022) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)=2x^2-33+\int_0^1 xf\left(\sqrt{1+63x^2}\right)\mathrm{d}x$. Tính tích phân $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

**Bài 7.** (GK2 Bảo Thắng 3 Lào cai 2022) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R thỏa mãn $f(x)=2x^2-19+\int_0^1 xf\left(\sqrt{1+35x^2}\right)\mathrm{d}x$. Tính tích phân $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

**Bài 8.** (GK2 Bảo Thắng 3 Lào cai 2022) Cho hảm số $f(x)$ liên tục trền $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)=2x^2-9+\int_0^1 xf\left(\sqrt{1+15x^2}\right)\mathrm{d}x$. Tính tích phân $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1:** (Chuyên Hùng Vương_Phú Thọ_L3_2020) Xét hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x+\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$. Giá trị $f(\ln(5620))$ bằng

**A.** 5622. **B.** 5620. **C.** 5618. **D.** 5621.

**Câu 2:** (Nguyễn Đức Cảnh_Thái Bình_L1_2021) Cho hàm số $f(x)$ xác định vả liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$ thỏa màn $f(x)=\frac{1}{x}+\int_1^2 xf(x)\mathrm{d}x, \forall x\in(0;+\infty)$. Tinh tích phãn $\int_1^e f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $\frac{5-2\mathrm{e}}{3}$. **B.** $3-2\mathrm{e}$. **C.** $2+2\mathrm{e}$. **D.** $1-2\mathrm{e}$.

**Câu 3:** Cho hảm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[0;+\infty)$ thỏa mãn $f(x)=x\sqrt{x}+\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$. Tính tích phân $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x$.

**A.** $\frac{528}{35}$. **B.** $\frac{488}{35}$. **C.** $\frac{408}{35}$. **D.** $\frac{368}{35}$.

**Câu 4:** Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x)=x\mathrm{e}^x+\int_0^2\left(f(x)+f'(x)-e^x-1\right)\mathrm{d}x, \forall x\in\mathbb{R}$. Tỉnh tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

LIVEWORKSHEETS

**A.** $2e^2-1$. **B.** $-2e^2-1$. **C.** $-2e^2+1$. **D.** $2e^2+1$.

**Câu 5:** (GK2 Nguyễn Thị Minh Khai Hà Nội 2021) Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(x)=x^3+\int_0^1 x^3 f\left(x^2\right)\mathrm{d}x, \forall x\in[0;1]$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ .

**A.** $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{4}{15}$. **C.** $\frac{13}{20}$. **D.** $\frac{23}{60}$.

**Câu 6:** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;1]$ thỏa $f(x)+2=\frac{3}{2}\int_{-1}^1 x.f(t)\mathrm{d}t, \forall x\in[-1;1]$. Tính $I=\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$

**A.** $I=4$. **B.** $I=0$. **C.** $I=-4$. **D.** $I=-2$.

**Câu 7:** Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(x)=e^x+\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$. Giá trị $f\left(\ln(5620)\right)$ bằng

**A.** $5622$. **B.** $5620$. **C.** $5618$. **D.** $5621$.

**Câu 8:** Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(x)=\sin x+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x.f(x)\mathrm{d}x$. Giá trị $f\left(\frac{-\pi}{2}\right)$ bằng

**A.** $-\pi$. **B.** $-1$. **C.** $-2$. **D.** $0$.

**Câu 9:** Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(x)=e^x+x\int_0^1 x.f(x)\mathrm{d}x$. Giá trị của $f(2)$ bằng

**A.** $e^2+2$. **B.** $e^2+1$. **C.** $e^2+3$. **D.** $e^2$.

**Câu 10:** Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(x)=e^x-e^{2x}\int_0^1 e^{-x}f(x)\mathrm{d}x$. Giá trị của $f(\ln 3)$ bằng

**A.** $3-\frac{9}{e}$. **B.** $3-\frac{3}{e}$ **C.** $3-\frac{1}{e}$. **D.** $3-\frac{9}{e+1}$.

**Câu 11:** Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(x)=x^3-3x+\int_0^1 6f(x)\mathrm{d}x$. Đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại bao nhiêu giao điểm ?

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

**Câu 12:** Cho hàm $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(x)=x^2-3x+2\int_0^1 f(x)f'(x)\mathrm{d}x,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Khi đó $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

LIVEWORKSHEETS

**A.** $\frac{10}{3}$. **B.** $-\frac{10}{3}$. **C.** $\frac{26}{15}$. **D.** $-\frac{26}{15}$.

**Câu 13:** Cho $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(x)>0$ và $f(x)=x^2+2-6\ln 2+\int_1^2 \frac{2f(x)-f'(x)}{x}\mathrm{d}x$.

Khi đó $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $\frac{26}{3}$. **B.** $2\ln 2-1$. **C.** $2\ln 2+1$. **D.** $-\frac{26}{3}$.

**Câu 14:** Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)=3x^2-2x+3+4\int_0^1 xf(x^2)\mathrm{d}x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** 17. **B.** 11. **C.** 14. **D.** 21.

**Câu 15:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(1)=-13$ và $f'(x)=15x^2-16x-1+\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$. Khi đó $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

**A.** $\frac{26}{3}$. **B.** $-\frac{64}{3}$. **C.** $-\frac{35}{4}$. **D.** $\frac{15}{4}$.

LIVEWORKSHEETS