

MATERI PEMBELAJARAN TATAP MUKA

SMA N 1 TEMPEL



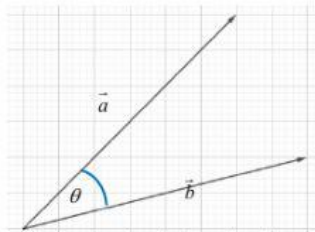
Mapel : Matematika Peminatan
Guru Mapel : Brigita Wahyu M., S.Pd.
Materi : Sudut antara 2 Vektor

Nama Siswa :

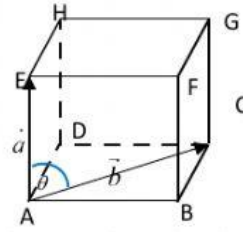
No :

Kelas :

Sudut yang dibentuk oleh dua vektor, secara grafis dapat diperlihatkan seperti pada Gambar 1. Dan Gambar 2 berikut ini:



Gambar 1. Ilustrasi sudut pada vektor 2 dimensi



Gambar 2. Ilustrasi sudut pada vektor 3 dimensi

Pada materi sebelumnya, Kalian sudah mengenal mengenai perkalian skalar dua vektor atau sering disebut *dot product*. Coba baca kembali rumus perkalian skalar dua vektor!

Salah satu rumus perkalian skalar dua vektor adalah $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$. Berdasarkan rumus tersebut, kita dapat menentukan sudut yang dibentuk oleh dua vektor dengan cara sebagai berikut:

$$|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

Sehingga dapat diperoleh : $\theta = \text{Arc cos } \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$

Contoh 1:

Sebuah kapal *boad* meluncur dari pangkalan Angkatan laut. Kapal pertama menuju ke arah koordinat $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan kapal ke-dua menuju ke arah $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ saat dilihat pada radar. Tentukan sudut yang dibentuk oleh lintasan kedua kapal tersebut.

Jawab:

Misalkan : $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
 \cos \theta &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \\
 &= \frac{4 \cdot 3 + 1 \cdot 5}{\sqrt{4^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 5^2}} \\
 &= \frac{12 + 5}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{34}} \\
 &= \frac{17}{\sqrt{17} \sqrt{17} \sqrt{2}} \\
 \theta &= \text{ArcCos} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\
 &= 45^\circ
 \end{aligned}$$

Ingat!

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

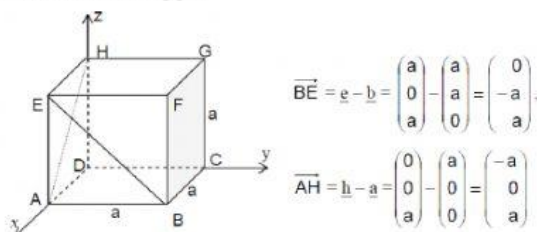
∴ Lintasan kedua kapal membentuk sudut 45° .

Contoh 2:

Pada kubus ABCD.EFGH, tentukan sudut antara garis $\overrightarrow{BE}$ and $\overrightarrow{AH}$.

Jawab:

Secara vektor kubus itu dapat digambarkan pada sistem koordinat ruang seperti berikut. Jika rusuk kubus itu a satuan maka koordinat titik-titik A(a,0,0), B(a,a,0), E(a,0,a), G(0,a,a), H(0,0,a). Sehingga:



$$\overrightarrow{BE} = \vec{e} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ a \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AH} = \vec{h} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AH}}{|\overrightarrow{BE}| |\overrightarrow{AH}|} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ a \end{pmatrix}}{\sqrt{0^2 + (-a)^2 + a^2} \sqrt{(-a)^2 + 0^2 + a^2}} \\ &= \frac{0 + 0 + a^2}{\sqrt{2a^2} \cdot \sqrt{2a^2}} = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{1}{2} \\ \theta &= \text{ArcCos} \frac{1}{2} = 60^\circ \end{aligned}$$

Contoh 3:

Dua buah pesawat tanpa awak diluncurkan dari stasiun antariksa. Pesawat pertama bergerak menuju koordinat titik (2, -1, 3), sedangkan pesawat ke-dua bergerak menuju koordinat titik (1, 3, -2). Apabila stasiun antariksa merupakan koordinat O(0,0,0), maka tentukan nilai Sinus sudut yang dibentuk oleh lintasan kedua pesawat tersebut!

Jawab :

Misalkan : $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, maka

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2}} \\ &= \frac{2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot (-2)}{\sqrt{14} \sqrt{14}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{-7}{14} \\ &= -\frac{1}{2} \\ \theta &= \text{ArcCos} \left(-\frac{1}{2} \right) = 120^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 120^\circ &= \sin (180^\circ - 60^\circ) \\ &= \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{3} \end{aligned}$$

Ingat!!

Cos negatif di kuadran II.

Ingat!!

Gunakan relasi sudut 180°, karena 120° berada di kuadran II.

$\sin a = \sin (180^\circ - \alpha)$

$= \sin \alpha$

Untuk lebih jelas bisa menyimak video berikut ini!

Kerjakan soal-soal **Latihan 2** berikut ini !

Latihan 2

1. Jika diketahui vektor $\vec{v} = 8\vec{i} + 4\vec{j}$ dan $\vec{w} = \vec{i} - 2\vec{j}$, maka tentukan sudut terkecil yang dibentuk oleh vektor $\vec{v}$ dan vektor $\vec{w}$!.

Jawab:

Menentukan nilai $\cos \theta$:

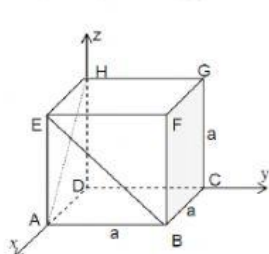
$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\dots + \dots}{\sqrt{\dots^2 + \dots^2} \sqrt{\dots^2 + \dots^2}} = \frac{\dots}{\sqrt{\dots} \sqrt{\dots}} = \dots$$

$$\theta = \text{ArcCos} \dots = \dots^\circ$$

2. Pada kubus ABCD.EFGH yang Panjang rusuknya adalah a, buktikan bahwa sudut antara garis $\overrightarrow{BG}$ and $\overrightarrow{CE}$ tegak lurus. (Baca Kembali syarat dua vektor tegak lurus)

Jawab :

Secara vektor kubus itu dapat digambarkan pada sistem koordinat ruang seperti berikut. Jika rusuk kubus itu a satuan maka koordinat titik-titik A(a,0,0), B(a,a,0), C(a, a, a), D(0,0,0), E(a,0,a), F(a,a,a), G(0,a,a), H(0,0,a). Sehingga:



$$\overrightarrow{BG} = \vec{g} - \vec{b} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CE} = \vec{e} - \vec{c} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Dua vektor dapat dikatakan tegak lurus bila membentuk sudut $\dots^\circ$.

Bila sudut antara vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ bernilai $\dots^\circ$, maka $\vec{a} \cdot \vec{b} = \dots$

Akan diperlihatkan bahwa $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{CE} = 0$

$$\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{CE} = \dots \times \dots + \dots \times \dots + \dots \times \dots = \dots^2 - \dots^2 = \dots$$

3. Diketahui segitiga ABC dengan A(2, 1, 2), B(6,1,2) dan C(6,5,2). Jika $\vec{u}$ mewakili vektor $\overrightarrow{AB}$ dan $\vec{v}$ mewakili vektor $\overrightarrow{AC}$, maka tentukan nilai Tangen sudut yang dibentuk oleh vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$. (Baca materi mtk wajib, tentang relasi sudut di berbagai kuadran)

Jawab:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

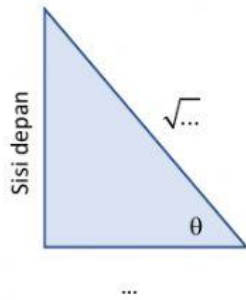
$$= \frac{\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}}{\sqrt{\dots^2 + \dots^2 + \dots^2} \sqrt{\dots^2 + \dots^2 + \dots^2}}$$

$$= \frac{\dots \times \dots + \dots \times \dots + \dots \times \dots}{\sqrt{\dots} \sqrt{\dots}}$$

$$= \frac{\dots + \dots + \dots}{\sqrt{\dots} \sqrt{\dots}} = \frac{\dots}{\dots \sqrt{\dots}} = \frac{\dots}{\sqrt{\dots}}$$

Diketahui :

$$\cos \theta = \frac{\text{Sisi samping}}{\text{Sisi miring}} = \frac{\dots}{\sqrt{\dots}}$$



$$\text{Sisi depan} = \sqrt{(\sqrt{\dots})^2 - \dots^2} = \sqrt{\dots} = \dots$$

Mencari $\tan \theta$:

$$\tan \theta = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$