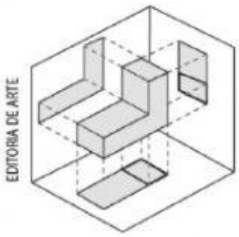
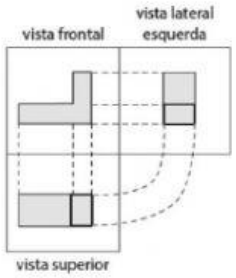
# Projeção ortogonal

Na abertura deste Capítulo, vimos algumas ideias do desenho técnico. Uma delas é a projeção, que consiste em projetar as vistas de um objeto em planos. As mais comuns são as vistas frontal, superior e lateral.

Veja abaixo um exemplo de uma peça e suas vistas.




Essa projeção é chamada de projeção ortogonal, pois é feita perpendicularmente ao plano de projeção, e as vistas são chamadas de **ortográficas**. Ela é muito utilizada nos projetos de fabricação de peças industriais.

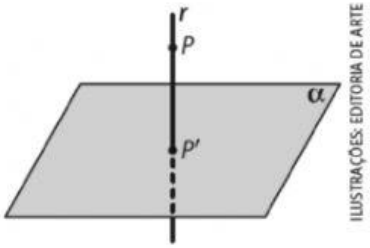
Veremos a seguir o conceito de projeção ortogonal relativa a um ponto, a uma reta e a uma figura qualquer, que são a base para a execução dos projetos.

# Projeção ortogonal de um ponto sobre um plano

Consideremos um ponto $P$ e um plano $\alpha$, $P \notin \alpha$.

Pelo ponto $P$, tracemos a reta $r$ perpendicular ao plano $\alpha$. Pela propriedade **1**, essa reta é única e intersecta $\alpha$ no ponto $P'$.

A projeção ortogonal de um ponto $P$ sobre um plano $\alpha$ é o ponto $P'$, $P' \in \alpha$, de modo que $\overline{PP'} \perp \alpha$. Se $P \in \alpha$, definimos $P' \equiv P$.

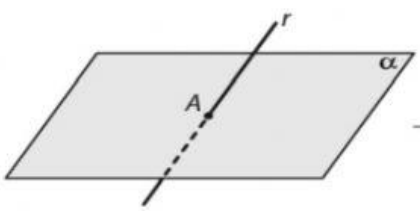



# Projeção ortogonal de uma reta sobre um plano

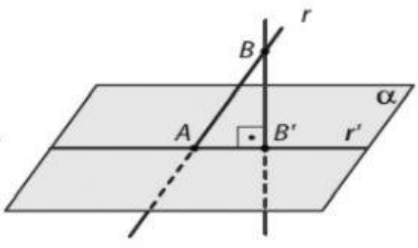
A projeção ortogonal de uma reta $r$ sobre um plano $\alpha$ é a figura obtida pelas projeções ortogonais, sobre $\alpha$, de todos os pontos de $r$.

Consideremos, primeiramente, o caso em que a reta $r$ é oblíqua a um plano $\alpha$ e que intersecta o plano no ponto $A$, conforme mostra a figura **1**.

Tomando outro ponto, $B$ de $r$, determinamos o ponto $B'$, que é a projeção ortogonal de $B$ sobre o plano $\alpha$ (figura **2**).




■ Figura **1**



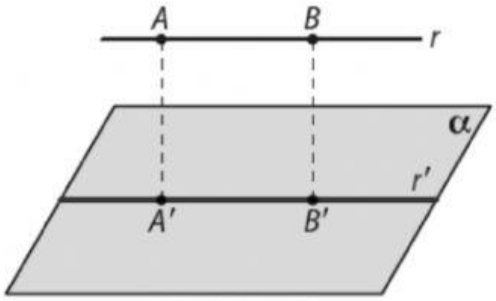

■ Figura **2**

LIVEWORKSHEETS

Pelo postulado $\mathbf{R}_2$, obtemos, então, a reta $r'$, determinada pelos pontos $A$ e $B'$, e que é a projeção ortogonal da reta $r$ sobre o plano $\alpha$.

Vejamos, agora, casos em que a reta $r$ não é oblíqua ao plano $\alpha$.

- Se $r$ é paralela a $\alpha$, então $r'$ é uma reta no plano $\alpha$ paralela a $r$.



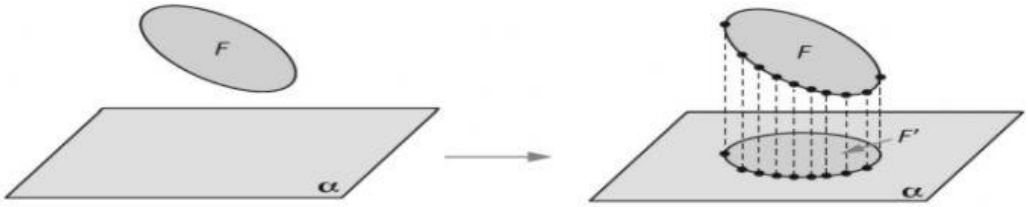

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

- $A'$: projeção ortogonal de $A$ sobre $\alpha$.
  $B'$: projeção ortogonal de $B$ sobre $\alpha$.

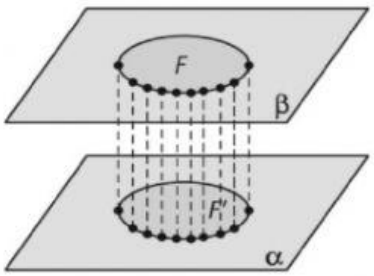
- Se $r$ está contida em $\alpha$, então $r'$ coincide com $r$.
- Se $r$ é perpendicular a $\alpha$, então a projeção ortogonal de $r$ sobre $\alpha$ é o ponto em que a reta $r$ intersecta o plano $\alpha$.

## Projeção ortogonal de uma figura sobre um plano

A projeção ortogonal de uma figura $F$ sobre um plano $\alpha$ é a figura $F'$ obtida pelas projeções ortogonais de todos os pontos de $F$ sobre $\alpha$




Se a figura $F$ está contida em um plano $\beta$ paralelo ao plano $\alpha$, então $F'$ é congruente a $F$.




LIVEWORKSHEETS

## > ATIVIDADE RESOLVIDA

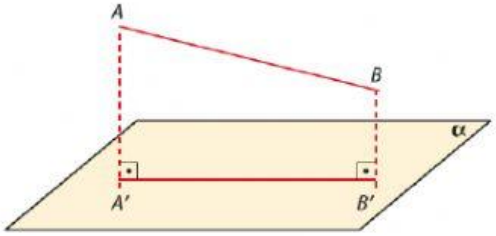
**01.** Mostre que a projeção ortogonal de um segmento de reta oblíquo a um plano, sobre esse plano, é menor do que o segmento.

**Resolução**

Para demonstrar esse resultado, vamos primeiro identificar quem são a hipótese e a tese.

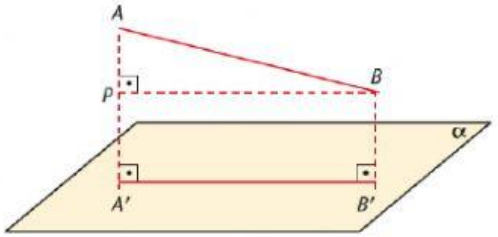
**Hipótese**
$\overline{AB}$ oblíquo a $\alpha$
$\overline{A'B'}$ é a projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre $\alpha$

**Tese**
$A'B' < AB$




Primeiramente, vamos considerar o caso em que $A \notin \alpha$ e $B \notin \alpha$.

Traçamos um segmento paralelo ao segmento $\overline{A'B'}$ passando por $B$ e que intersecta o segmento $\overline{AA'}$ no ponto $P$.

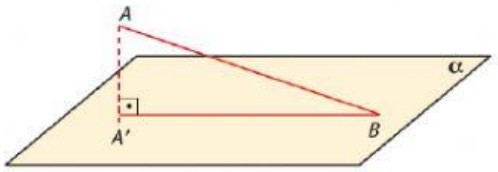



Por construção, $A'B'BP$ é um retângulo e, portanto, $\overline{A'B'} \equiv \overline{PB}$.

Também por construção, $\triangle ABP$ é retângulo em $\hat{P}$. Então, $PB < AB$, pois $\overline{AB}$ é a hipotenusa desse triângulo.

Portanto, de $\overline{A'B'} \equiv \overline{PB}$ e $PB < AB$, concluímos que $A'B' < AB$.

Agora, vamos considerar o caso em que $A \notin \alpha$ e $B \in \alpha$. (o caso $A \in \alpha$ e $B \notin \alpha$ é análogo)



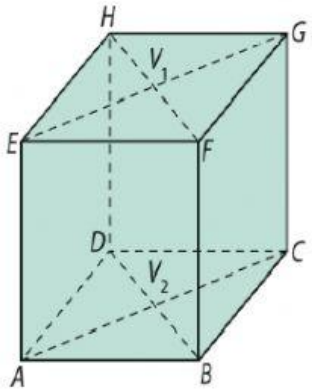

Nesse caso, $\triangle ABA'$ é retângulo em $\hat{A'}$.

Então $A'B < AB$, pois $\overline{AB}$ é a hipotenusa desse triângulo. Como $B \in \alpha$, $B' \equiv B$.

Portanto, $A'B' < AB$.

## Exercícios

**01.** Observando o cubo da figura, responda.

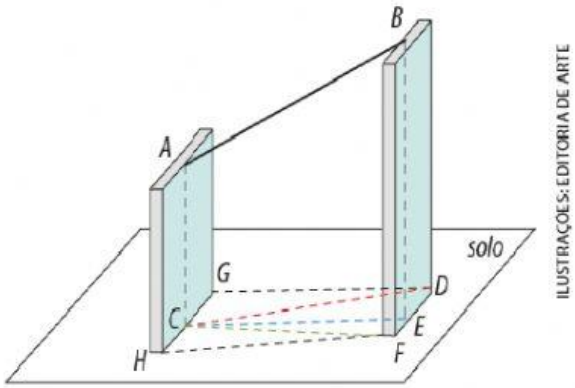



a) Qual é a projeção ortogonal do ponto $G$ sobre o plano $ABC$?

b) Qual é a projeção ortogonal do ponto $A$ sobre o plano $BCF$?

c) Qual é a projeção ortogonal do ponto $V_1$ sobre o plano $ABC$?

**02.** (UEA-AM) Uma haste de metal foi presa entre dois muros, ambos perpendiculares ao solo, nos pontos $A$ e $B$, conforme mostra a figura.




ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

A projeção ortogonal dessa haste, no solo, é representada na figura pelo segmento

a) $\overline{HF}$
b) $\overline{GD}$
c) $\overline{CD}$
d) $\overline{CE}$
e) $\overline{CF}$

LIVEWORKSHEETS