Juros e funções

Existe uma inter-relação entre o juro simples e a função afim e, também, entre o juro composto e a função exponencial, como veremos a seguir.

Um capital de R$ 1.000,00 foi aplicado a uma taxa de 12% ao ano. Vamos calcular o montante obtido, ano a ano, para os regimes de juro simples e de juro composto e analisar os resultados.

Juro simples e função afim

Para calcular o montante, ano a ano, da aplicação em regime de juro simples, vamos utilizar a relação $M = C + C \cdot i \cdot t$, na qual, ao substituirmos os valores $C = 1000$ e $i = 0{,}12$, obtemos:

$$M = 1000 + 1000 \cdot 0{,}12 \cdot t, \text{ ou seja, } M = 1000 + 120t$$

Observamos que a expressão obtida é a lei de uma função afim, com variável dependente M e variável independente t. Atribuindo a t os valores 1, 2, 3, 4, 5, ..., obtemos os valores correspondentes de M:

***t* (anos)**	1	2	3	4	5	...
***M* (reais)**	1120	1240	1360	1480	1600	...

Nesse caso, os valores do montante obtidos, ano a ano, são termos da progressão aritmética (1120, 1240, 1360, 1480, 1600, ...), de razão $r = 120$, com termo geral $a_n = 1000 + 120n$, correspondente a uma função afim cujo domínio é o conjunto dos números naturais não nulos.

Assim, dados o capital e a taxa de juros, o montante obtido pelo regime de juro simples é uma função afim do tempo de aplicação. Como isso ocorre para todos os casos em que há regime de juro simples, podemos associar o cálculo do montante à função afim dada por $M = C + C \cdot i \cdot t$.

Juro composto e função exponencial

Considerando a situação enunciada, na qual o capital de R$ 1.000,00 é aplicado à taxa de 12% ao ano, o montante, a juro composto, pode ser obtido pela relação:

$$M = 1000(1 + 0{,}12)^t, \text{ ou seja, } M = 1000 \cdot 1{,}12^t$$

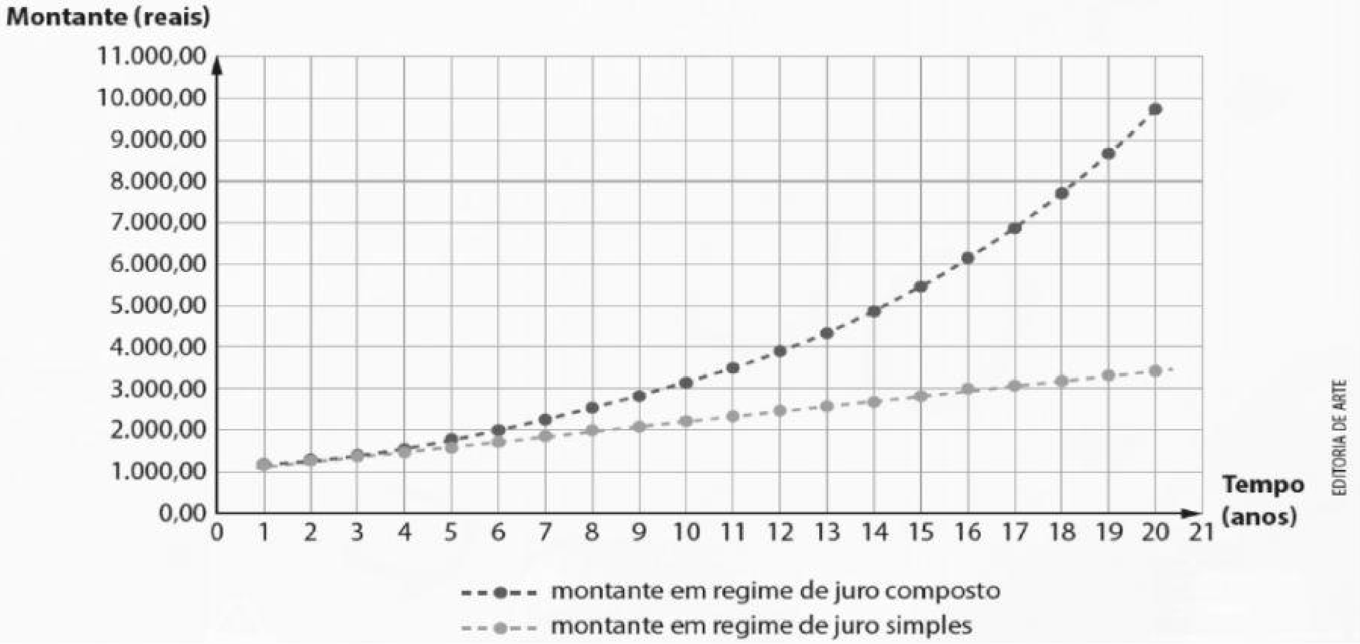
Observamos que a expressão obtida é a lei de uma função exponencial, com variável dependente M e variável independente t. Atribuindo a t os valores 1, 2, 3, 4, 5, ..., obtemos os valores correspondentes de M:

***t* (anos)**	1	2	3	4	5	...
***M* (reais)**	1120	1254,40	1404,93	1573,52	1762,34	...

Nesse caso, os valores do montante obtido, ano a ano, são termos da progressão geométrica (1120; 1254,40; 1404,93; 1573,52; 1762,34; ...), de razão $q = 1{,}12$, com termo geral $a_n = 1000 \cdot (1{,}12)^n$, correspondente a uma função exponencial cujo domínio é o conjunto dos números naturais não nulos.

Assim, dados o capital e a taxa de juros, o montante obtido pelo regime de juro composto é uma função exponencial do tempo de aplicação. Como isso ocorre para todos os casos em que há regime de juro composto, podemos associar o cálculo do montante a uma função exponencial dada por $M = C(1 + i)^t$.

Vamos, agora, analisar o gráfico das duas funções em um mesmo plano cartesiano e analisar os valores obtidos.



No gráfico estão indicados os pontos pertencentes aos gráficos das funções. Note que não traçamos a reta nem a curva da função exponencial contínuas, pois o domínio de ambas as funções é $\mathbb{N}^*$. O tracejado apenas indica a tendência da curva e auxilia na visualização dos resultados.

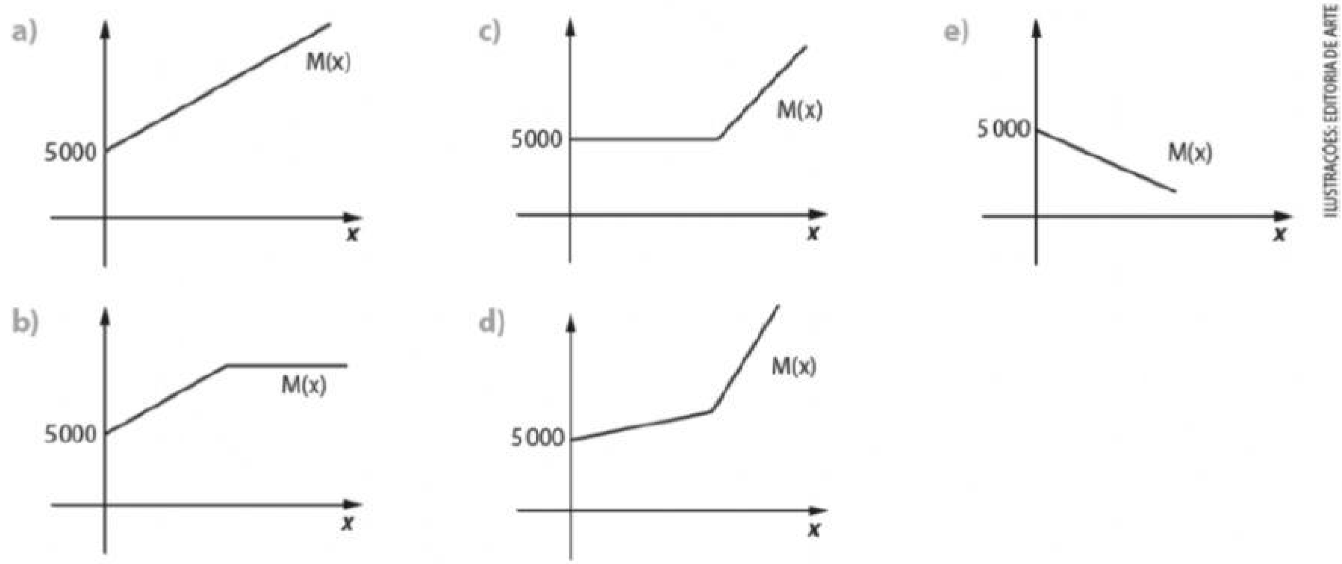
Observando os gráficos, percebemos que para $t = 1$, o montante obtido é o mesmo para os dois regimes de juro. A partir daí, quanto maior o tempo de aplicação, maior a diferença entre os montantes obtidos no regime de juro composto e no de juro simples.

Assim, para o caso de um investimento, a rentabilidade em regime de juro composto será maior do que a rentabilidade em regime de juro simples a partir do segundo período de investimento. Se a situação for de empréstimo, a dívida aumenta mais a cada período, a partir do segundo, no regime de juro composto em relação ao mesmo empréstimo em regime de juro simples.

Observe que essa diferença aumenta à medida que o tempo passa.

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

1. (Enem/MEC) Paulo emprestou R$ 5.000,00 a um amigo, a uma taxa de juros simples de 3% ao mês. Considere x o número de meses do empréstimo e M(x) o montante a ser devolvido para Paulo no final de x meses. Nessas condições, a representação gráfica correta de M(x) é:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Resolução

Sabemos que $M = C + J$.

Do enunciado, percebemos que o montante $M(x)$ é uma função do tempo x.

Sendo $i = 3\%$ a.m. e $C = 5\,000$, temos:

$$M(x) = C + C \cdot i \cdot t$$

Logo, $M(x) = 5\,000 + 50\cancel{0}\cancel{0} \cdot \frac{3}{1\cancel{0}\cancel{0}} \cdot x$

Portanto, $M(x) = 5\,000 + 150x$.

Essa é uma função afim crescente ($a = 150$ e $a > 0$) e seu gráfico intersecta o eixo vertical dado pelo par ordenado (0, 5 000).

Logo, seu gráfico é parte de uma reta crescente, com $x \geqslant 0$.

Portanto, a representação gráfica de $M(x)$ está mostrada na alternativa **a**.

2. Jorge quer aplicar R$ 6.000,00 com o objetivo de, após 15 meses, obter um montante de R$ 9.348,00. A que taxa mensal de juro composto deve aplicar esse capital?

Resolução

Os dados do problema são: $C = 6\,000$, $M = 9\,348$ e $t = 15$ meses.

Usando a fórmula do montante, temos:

$M = C(1 + i)^t$

Logo, $9\,348 = 6\,000(1 + i)^{15}$

Assim, $(1 + i)^{15} = \frac{9\,348}{6\,000} \Rightarrow (1 + i)^{15} = 1{,}558$

Usando a propriedade do logaritmo de uma potência, temos:

$$\log\,(1 + i)^{15} = \log 1{,}558 \Rightarrow 15 \cdot \log\,(1 + i) = \log 1{,}558$$

Fazendo a aproximação de $\log 1{,}558 = 0{,}19257$, temos:

$$15 \cdot \log\,(1 + i) = 0{,}19257 \Rightarrow \log\,(1 + i) = 0{,}01284 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 + i = 10^{0{,}01284} \Rightarrow 1 + i = 1{,}03 \Rightarrow i = 0{,}03 \text{ ou seja, } i = 3\%$$

Jorge deve aplicar seu capital à taxa de 3% a.m.

Exercícios

1. Uma pessoa aplicou R$ 18.000,00 à taxa de juro composto de 2,8% ao mês e obteve um rendimento de R$ 6.390,00. Qual é o prazo dessa aplicação?

2. (UFS-SE) Para analisar a veracidade das afirmações abaixo, considere que para estimar o crescimento populacional dos municípios de certo Estado é usada a expressão $P(t) = P(0) \cdot (1 + i)^t$, em que $P(0)$ é a população considerada em certo ano, $P(t)$ a população observada t anos depois e i a taxa anual de crescimento da população.

I. Se em 2004 um município desse Estado tinha 50 000 habitantes e, a partir desse ano, a população aumentou anualmente à taxa de 2%, então em 2007 tal município deverá ter 50 604 habitantes.

II. Sabe-se que, anualmente, a população de um município X cresce à taxa de 2%, enquanto que a de um município Y cresce à taxa de 5%. Se hoje X e Y têm, respectivamente, 19 600 e 28 900 habitantes, daqui a dois anos a razão entre seus respectivos números de habitantes será $\frac{2}{5}$.

III. Atualmente, os municípios X e Y têm 129 600 e 122 500 habitantes, respectivamente. Supondo que a população de X cresça a uma taxa anual de 5% e a de Y cresça a uma taxa anual de 8%, então daqui a dois anos X e Y terão o mesmo número de habitantes.

IV. A taxa anual de crescimento da população de um município pode ser calculada pela expressão

$$i = \frac{\log P(t) - \log P(0)}{t} - 1.$$

V. Se atualmente um município tem 44 100 habitantes e nos últimos cinco anos sua população cresceu à taxa anual de 5%, então há dois anos o seu número de habitantes era menor que 42 000.

3. Qual é o tempo necessário para que um capital aplicado a juros compostos de 5% ao mês:

a) duplique? b) triplique?

4. Um investidor aplicou R$ 80.000,00 a juros compostos de 2,2% ao mês.

a) Daqui a quantos meses terá um montante de R$ 85.400,00?

b) Após quantos anos terá um montante de R$ 134.868,80?

5. Qual é a taxa mensal de juro composto que, aplicada ao capital de R$ 24.000,00, o transforma em um montante de R$ 36.087,00 em 7 meses?

6. (Cespe/UnB-DF) Um cliente tomou R$ 20.000,00 emprestados de um banco que pratica juros compostos mensais e, após 12 meses, pagou R$ 27.220,00. Nesse caso, considerando 1,026 como valor aproximado para $1{,}361^{\frac{1}{12}}$, é correto afirmar que a taxa de juros nominal, anual, praticada pelo banco foi igual a:

a) 30,2%. c) 32,2%. e) 34,2%.
b) 31,2%. d) 33,3%.

7. (UFPel-RS) Um dos motivos que leva as pessoas a enfrentarem o problema do desemprego é a busca, por parte das empresas, de mão de obra qualificada, dispensando funcionários não habilitados e pagando a indenização a que têm direito. Um funcionário que vivenciou tal problema recebeu uma indenização de R$ 57 000,00 em três parcelas, em que a razão da primeira para a segunda é de $\frac{4}{5}$ e a razão da segunda para a terceira, de $\frac{6}{12}$.

(Dados: $\log 1{,}06 = 0{,}0253$; $\log 1{,}01 = 0{,}0043$.)

Com base no texto e em seus conhecimentos, determine:

a) o valor de cada parcela;

b) o tempo necessário para que o funcionário aplique o valor da primeira parcela, a juro composto, a uma taxa de 1% ao mês, para acumular um montante de R$ 12 738,00;

c) a taxa mensal que deve ser aplicada, a juro simples, à segunda parcela, para que o funcionário, no final de 2 anos, obtenha o montante de R$ 25 800,00.