Função quadrática

A função quadrática também pode ser denominada função polinomial do 2º grau, pois as relações entre a variável dependente e a variável independente são expressas por polinômios do 2º grau.

> Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b, c reais e $a \neq 0$, é chamada de **função quadrática**.

Os números a, b e c são os **coeficientes** (ou parâmetros) da função, sendo que a é o coeficiente do termo x^2, b é o coeficiente do termo x e c é o coeficiente independente.

Observe a seguir a lei de formação de algumas funções quadráticas.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$, em que os coeficientes são: $a = 1$, $b = -3$ e $c = 2$.

b) $g(x) = 0{,}8x^2 - 1$, em que os coeficientes são: $a = 0{,}8$, $b = 0$ e $c = -1$.

c) $y = -x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x$, em que os coeficientes são: $a = -1$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $c = 0$.

d) $y = -5x^2$, com os coeficientes: $a = -5$, $b = 0$ e $c = 0$.

Não são leis de funções quadráticas:

- $h(x) = 7x$
- $y = x^4 + 2x^2$
- $y = 5x$

Agora, considere a situação a seguir.

Elisa trabalha com artigos para dispositivos eletrônicos e, fazendo uma pesquisa na internet de preço de capas para celular, obteve uma função quadrática que modela o lucro diário L, em reais, de uma loja em relação ao preço pelo qual cada capa é vendida, também em reais. Essa função é dada pela lei $L(x) = -x^2 + 55x - 250$.

Utilizando essa lei, Elisa calculou o lucro diário dessa loja supondo que cada capa fosse vendida a R$ 20,00. Veja como ela calculou.

$$L(20) = -(20)^2 + 55 \cdot 20 - 250$$
$$L(20) = -400 + 1\,100 - 250$$
$$L(20) = 450$$

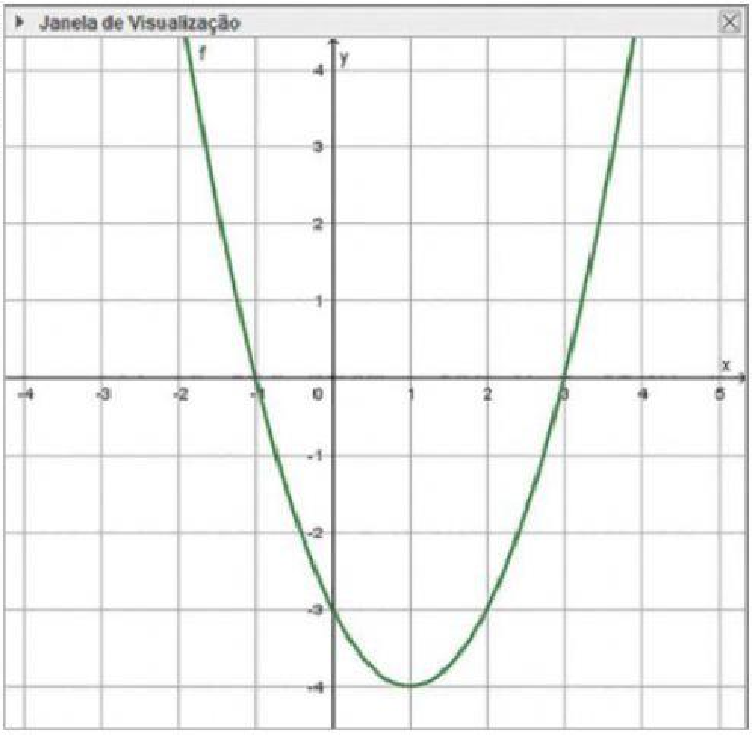
Assim, Elisa verificou que vender cada capa a R$ 20,00 gera um lucro diário de R$ 450,00, considerando a função L.

Gráfico da função quadrática

Tomás utilizou o **GeoGebra** para observar como é o gráfico de uma função quadrática. Ele utilizou a lei de duas funções para representar os respectivos gráficos e obteve duas curvas, chamadas de parábolas, como podemos verificar a seguir.

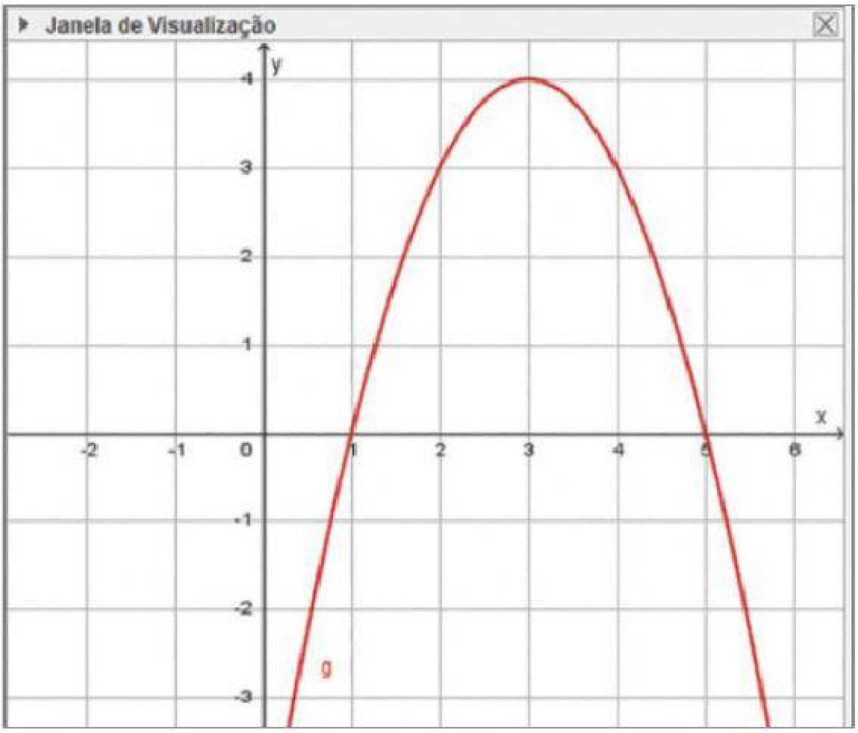
a) O gráfico da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

FOTOS: GEOGEBRA



- Os coeficientes da função f são: $a = 1$, $b = -2$ e $c = -3$. Note que, nesse caso, $a > 0$.

b) O gráfico da função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = -x^2 + 6x - 5$.



- Os coeficientes da função g são: $a = -1$, $b = 6$ e $c = -5$. Note que, nesse caso, $a < 0$.

É possível demonstrar que o gráfico de uma função quadrática é uma **parábola** que pode ter sua **concavidade** voltada para cima, se o coeficiente a for positivo, ou para baixo, se a for negativo.

Destacamos também que, para qualquer função quadrática, o ponto de intersecção da parábola com o eixo y é o ponto de coordenadas $(0, c)$, em que c é o coeficiente independente na lei da função quadrática. Observe:

Considerando a lei $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$; portanto, $f(0) = c$.

Assim como vimos no estudo de função afim, para construir o gráfico da função quadrática, podemos elaborar uma tabela com alguns valores de x e calcular os valores de y correspondentes para obter alguns pontos pertencentes ao gráfico da função dada. No entanto, no caso da função quadrática, precisamos de mais do que dois pontos para ter uma noção do traçado da parábola.

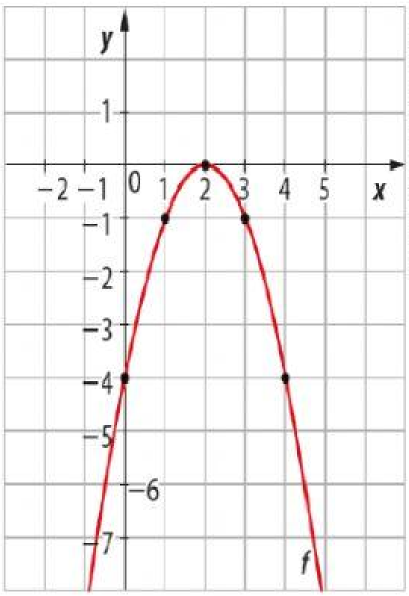
Acompanhe alguns exemplos:

a) O gráfico da função quadrática definida por $f(x) = -x^2 + 4x - 4$.

Inicialmente, construímos uma tabela com alguns valores de x e calculamos $y = f(x)$. Em seguida, localizamos, no sistema cartesiano, os pontos (x, y) pertencentes ao gráfico da função f e traçamos a parábola que contém esses pontos.

Como $a < 0$, a parábola terá concavidade voltada para **baixo**.

x	$y = -x^2 + 4x - 4$	(x, y)
0	$y = -(0)^2 + 4 \cdot 0 - 4 = -4$	$(0, -4)$
1	$y = -(1)^2 + 4 \cdot 1 - 4 = -1 + 4 - 4 = -1$	$(1, -1)$
2	$y = -(2)^2 + 4 \cdot 2 - 4 = -4 + 8 - 4 = 0$	$(2, 0)$
3	$y = -(3)^2 + 4 \cdot 3 - 4 = -9 + 12 - 4 = -1$	$(3, -1)$
4	$y = -(4)^2 + 4 \cdot 4 - 4 = -16 + 16 - 4 = -4$	$(4, -4)$

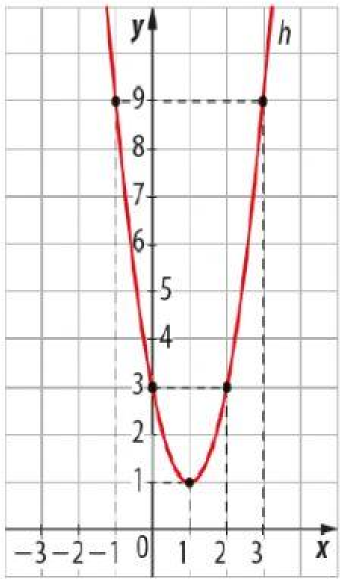


b) O gráfico da função quadrática definida por $h(x) = 2x^2 - 4x + 3$.

Assim como no exemplo anterior, construímos uma tabela com alguns valores de x e calculamos $y = h(x)$. Em seguida, localizamos, no sistema cartesiano, os pontos (x, y) pertencentes ao gráfico da função h e traçamos a parábola que contém esses pontos.

Como $a > 0$, nesse caso, a parábola terá concavidade voltada para **cima**.

x	$y = 2x^2 - 4x + 3$	(x, y)
-1	$y = 2 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 3 = 2 + 4 + 3 = 9$	$(-1, 9)$
0	$y = 2 \cdot (0)^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 0 - 0 + 3 = 3$	$(0, 3)$
1	$y = 2 \cdot (1)^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 2 - 4 + 3 = 1$	$(1, 1)$
2	$y = 2 \cdot (2)^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 8 - 8 + 3 = 3$	$(2, 3)$
3	$y = 2 \cdot (3)^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 18 - 12 + 3 = 9$	$(3, 9)$



> ATIVIDADES RESOLVIDAS

1. Em uma marcenaria, o número N de móveis fabricados no mês varia em função do número x de funcionários que trabalham na marcenaria, de acordo com uma função quadrática dada por $N(x) = x^2 + 2x$.

ANTONIODIAZ/SHUTTERSTOCK.COM

- Algumas profissões exigem o uso de equipamentos de proteção individual (EPI) que auxiliam na prevenção de acidentes de trabalho.

Quantos móveis podem ser produzidos em um mês quando estão trabalhando 12 funcionários na marcenaria?

Resolução

Para responder à questão, precisamos calcular $N(12)$.

Nesse caso, temos:

$N(12) = 12^2 + 2 \cdot 12 = 144 + 24 = 168$

Portanto, em um mês, podem ser produzidos 168 móveis quando há 12 funcionários trabalhando na marcenaria.

2. Considere uma função quadrática f em que $f(0) = 5$, $f(1) = 3$ e $f(-1) = 1$. Escreva a lei de formação dessa função e calcule $f(5)$.

Resolução

Como f é uma função quadrática, ela é definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Substituindo os dados do enunciado na lei da função, obtemos o seguinte:

$f(0) = 5 \Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 5 \Rightarrow c = 5$

$f(1) = 3 \Rightarrow a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a + b + 5 = 3 \Rightarrow a + b = -2$ (I)

$f(-1) = 1 \Rightarrow a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a - b + 5 = 1 \Rightarrow a - b = -4$ (II)

As equações (I) e (II) formam um sistema de equações:

$$\begin{cases} a + b = -2 \\ a - b = -4 \end{cases}$$

Adicionando membro a membro essas equações, temos:

$2a = -6 \Rightarrow a = -3$

Substituindo $a = -3$ em (I), temos:

$-3 + b = -2 \Rightarrow b = 1$

Como $a = -3$, $b = 1$ e $c = 5$, a lei de formação da função f é $f(x) = -3x^2 + x + 5$.

Para calcular $f(5)$, substituímos x por 5 na lei da função f. Assim:

$f(5) = -3 \cdot (5)^2 + 5 + 5 = -65$

Portanto, $f(5) = -65$.

3. Seja f uma função quadrática dada por $f(x) = -2x^2 + 10x$. Determine:

a) $f(3) + f(-1) - f(-2)$;

b) os valores de x, se existirem, para os quais $f(x) = 8$.

Resolução

a) Inicialmente, calculamos os valores de $f(3)$, $f(-1)$ e $f(-2)$.

$f(3) = (-2) \cdot 3^2 + 10 \cdot 3 = -18 + 30 = 12$

$f(-1) = (-2) \cdot (-1)^2 + 10 \cdot (-1) = -2 - 10 = -12$

$f(-2) = (-2) \cdot (-2)^2 + 10 \cdot (-2) = -8 - 20 = -28$

Logo, $f(3) = 12$, $f(-1) = -12$ e $f(-2) = -28$.

Realizando o cálculo solicitado, temos:

$f(3) + f(-1) - f(-2) = 12 + (-12) - (-28) =$

$= 12 - 12 + 28 = 28$

Portanto, $f(3) + f(-1) - f(-2) = 28$.

b) Substituindo $f(x)$ por 8 na lei da função, temos:

$-2x^2 + 10x = 8 \Rightarrow -2x^2 + 10x - 8 = 0$

Antes de resolver essa equação do 2º grau, podemos dividir ambos os membros por -2. Assim, temos:

$x^2 - 5x + 4 = 0$

Podemos utilizar a fórmula de Bhaskara para resolver essa equação.

Calculando o valor de Δ, temos:

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9$

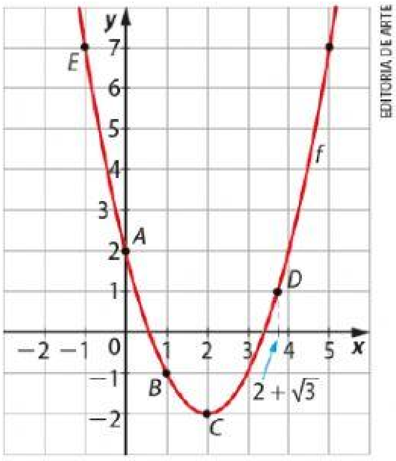
Assim, temos:

$$x = \frac{-(-5) \pm 3}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

Logo, $x' = 1$ e $x'' = 4$.

Portanto, $f(x) = 8$ para $x = 1$ e para $x = 4$.

4. Considere o gráfico de uma função quadrática f representado a seguir e faça o que se pede em cada item.



a) Sabendo que os pontos A, B, C, D e E pertencem ao gráfico de f, escreva a lei de formação dessa função.

b) Todos os dados fornecidos pelo enunciado foram utilizados na resolução do item **a**? O que teria acontecido caso outros pontos tivessem sido escolhidos?

Resolução

a) A lei de formação da função quadrática é dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Para determinar a lei de formação da função representada pelo gráfico dado, precisamos obter os coeficientes a, b e c.

Inicialmente, escrevemos os pares ordenados dos pontos A, B, C, D e E:

$A(0, 2)$; $B(1, -1)$; $C(2, -2)$; $D\left(2 + \sqrt{3}, 1\right)$; $E(-1, 7)$.

Sendo assim, verificamos que $f(0) = 2$, $f(1) = -1$, $f(2) = -2$, $f\left(2 + \sqrt{3}\right) = 1$ e $f(-1) = 7$.

Sabemos que o ponto de intersecção da parábola com o eixo y é o ponto de coordenadas $(0, c)$, que corresponde ao ponto $A(0, 2)$. Então concluímos que $c = 2$.

Para determinar os coeficientes a e b, escolhemos outros dois pontos quaisquer e substituímos na lei de formação.

Escolhendo os pontos B e C, temos:

$f(1) = -1 \Rightarrow a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 2 = -1 \Rightarrow$
$\Rightarrow a + b = -3$ (I)

$f(2) = -2 \Rightarrow a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 2 = -2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4a + 2b = -4$ (II)

As equações (I) e (II) formam um sistema de equações:

$$\begin{cases} a + b = -3 \\ 4a + 2b = -4 \end{cases}$$

Multiplicando ambos os membros da primeira equação por -2, temos:

$$\begin{cases} -2a - 2b = 6 \\ 4a + 2b = -4 \end{cases}$$

Adicionando membro a membro essas equações, temos:

$2a = 2 \Rightarrow a = 1$

Substituindo $a = 1$ em (I), temos:

$1 + b = -3 \Rightarrow b = -4$

Como $a = 1$, $b = -4$ e $c = 2$, a lei de formação da função f é $f(x) = x^2 - 4x + 2$.

b) Observando a resolução do item anterior, percebemos que utilizamos as informações a respeito dos pontos A, B e C. Os pontos D e E não foram utilizados.

Caso tivéssemos escolhido os pontos D e E ao invés dos pontos B e C, teríamos chegado à mesma resposta.

5. Considere uma função quadrática h, definida por $h(x) = (3m - 15)x^2 + 6x - \frac{5}{4}$, com $m \in \mathbb{R}$. Determine o valor de m para que a parábola correspondente ao gráfico de h tenha concavidade voltada para cima.

Resolução

Para que o gráfico da função h tenha a concavidade voltada para cima, o coeficiente do termo x^2 deve ser maior do que zero. Nesse caso, temos:

$3m - 15 > 0 \Rightarrow 3m > 15 \Rightarrow m > 5$

Portanto, o gráfico de h terá a concavidade voltada para cima para todo número real $m > 5$.

Exercícios

1. Um objeto é lançado para cima, a partir do solo, e a altura h, em metro, varia em função do tempo t, em segundo, decorrido após o lançamento. Supondo que a lei dessa função seja $h(t) = 30t - 5t^2$, responda:

a) Qual é a altura do objeto 3 segundos após o lançamento?

b) Quanto tempo após o lançamento o objeto encontra-se a 40 metros de altura?

c) Como podemos interpretar o resultado obtido no item **b**?

2. Considere a função definida por $f(x) = x^2 - 5x + 4$ e calcule:

a) $f(0)$;

b) $f(-4)$;

c) $f\left(\frac{1}{2}\right)$;

d) $f\left(\sqrt{2}\right)$.

3. (Unifesp-SP) A tabela mostra a distância s em centímetros que uma bola percorre descendo por um plano inclinado em t segundos.

t	0	1	2	3	4
s	0	32	128	288	512

A distância s é função de t dada pela expressão $s(t) = at^2 + bt + c$, onde a, b, c são constantes.

A distância s, em centímetros, quando $t = 2{,}5$ segundos, é igual a:

a) 248.

b) 228.

c) 208.

d) 200.

e) 190.

4. A soma S dos n primeiros números naturais diferentes de zero $(1 + 2 + 3 + 4 + ... + n)$ pode ser calculada utilizando a função quadrática dada por $S(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$.

Qual é a soma dos 50 primeiros números naturais diferentes de zero?

5. Dada a função $f(x) = -x^2 + 9x - 8$, determine os valores reais de x para que se tenha:

a) $f(x) = 0$;

b) $f(x) = 10$;

c) $f(x) = 11$;

d) $f(x) = -\frac{15}{4}$.

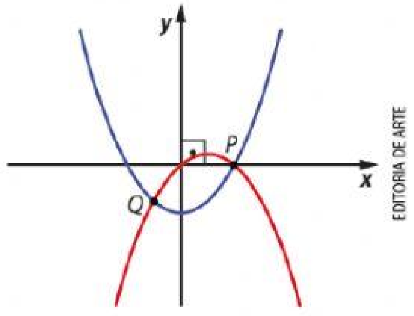
6. (UFPR) A distância que um automóvel percorre a partir do momento em que um condutor pisa no freio até a parada total do veículo é chamada de distância de frenagem. Suponha que a distância de frenagem d, em metros, possa ser calculada pela fórmula $d(v) = \frac{1}{120}(v^2 + 8v)$, sendo v a velocidade do automóvel, em quilômetros por hora, no momento em que o condutor pisa no freio.

a) Qual é a distância de frenagem de um automóvel que se desloca a uma velocidade de 40 km/h?

b) A que velocidade um automóvel deve estar para que sua distância de frenagem seja de 53,2 m?

7. Uma função quadrática f é tal que $f(0) = 6$, $f(1) = 2$ e $f(-2) = 20$. Determine o valor de $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

8. (UEA-AM) Em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais estão representados os gráficos das funções dadas por $f(x) = x^2 - 4$ e $g(x) = -x^2 + 2x$, com os pontos comuns P e Q, conforme a figura.



As coordenadas dos pontos P e Q são, respectivamente,

a) (2, 0) e (2, −3).

b) (2, 0) e (−0,5, −3).

c) (1, 0) e (−1, −3).

d) (2, 0) e (−1, −3).

e) (1, 0) e (−0,5, −3).

9. (Vunesp-SP) O desenvolvimento da gestação de uma determinada criança com 40 semanas, 50,6 cm de altura e com 3 446 gramas de massa, foi modelado, a partir da 20ª semana, aproximadamente, pelas funções matemáticas $h(t) = 1{,}5t - 9{,}4$ e $p(t) = 3{,}8t^2 - 72t + 246$, em que t indica o tempo em semanas, $t > 20$, $h(t)$ a altura em centímetros e $p(t)$ a massa em gramas. Admitindo o modelo matemático, determine quantos gramas tinha o feto quando sua altura era 35,6 cm.

10. Mensalmente, uma fábrica produz x unidades de certo produto. Sua produção é vendida por $(500 - x)$ reais a unidade. Cada unidade desse produto tem um custo de R$ 100,00. Além disso, a fábrica tem uma despesa mensal fixa de R$ 10.000,00.

JOHN FEDELE/THE IMAGE BANK/GETTY IMAGES

- Saber a margem de lucro dos produtos é importante para prever a lucratividade e o equilíbrio financeiro de um negócio.

a) Sabendo que o lucro é calculado pela diferença entre a receita das vendas e a despesa, escreva a lei da função que determina o lucro mensal L dessa fábrica, em reais, em função de x.

b) De quantos reais será o lucro quando a fábrica vender 100 produtos?

11. Represente, no sistema cartesiano, o gráfico de cada função quadrática definida a seguir.

a) $y = -x^2$

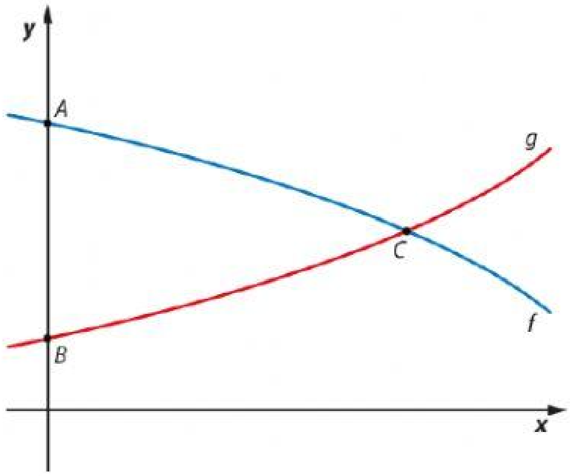
b) $y = x^2 - 4$

c) $y = -x^2 + 6x - 9$

d) $y = x^2 - 5x$

12. Determine o valor de m para que a parábola que representa a função definida por $y = 3x^2 - x + m$ passe pelo ponto $(1, 6)$.

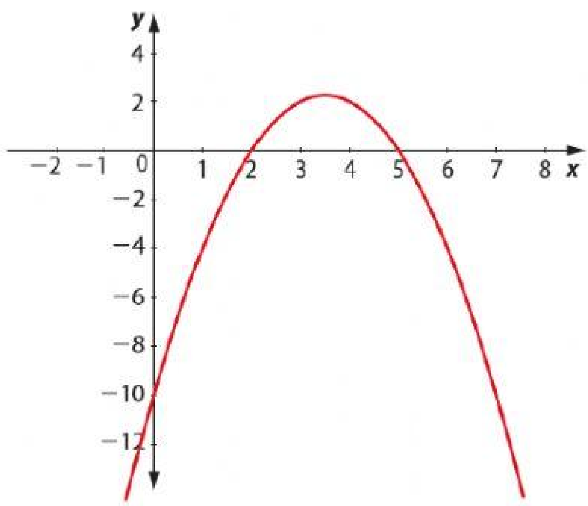
13. No plano cartesiano a seguir, está representada parte dos gráficos de duas funções dadas por $f(x) = -0{,}01x^2 - 0{,}2x + 8$ e $g(x) = 0{,}01x^2 + 0{,}1x + 3$.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

A partir dessas informações, determine as coordenadas dos pontos A, B e C.

14. (UEG-GO) A lei da função real cujo gráfico está representado a seguir é



a) $x^2 - 7x + 10$

b) $-x^2 + 7x - 10$

c) $-x^2 + 7x + 10$

d) $x^2 - 7x - 10$

e) $-x^2 - 7x + 10$