• Função afim

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, com a e b reais, é chamada de **função afim**.

Observe outros exemplos de leis de função afim.

a) $f(x) = 5x + 1$ ou $y = 5x + 1$;

b) $g(x) = -\sqrt{2}x - 1$ ou $y = -\sqrt{2}x - 1$;

c) $h(x) = -\frac{2}{5}x$ ou $y = -\frac{2}{5}x$;

d) $z(x) = 14{,}90$ ou $y = 14{,}90$.

Lembre-se de que x é a variável independente e y é a variável dependente na função afim dada por $y = ax + b$. Ao atribuir valores para a variável independente ***x***, obtemos ***y***, o **valor da função**. Observe alguns exemplos:

- Considerando a função dada por $f(x) = 5x + 1$, podemos calcular $f(3)$ da seguinte maneira:

  $f(3) = 5 \cdot 3 + 1 \Rightarrow f(3) = 16$

  Portanto, 16 é o valor da função f para $x = 3$.

- Considerando a função dada por $h(x) = -\frac{2}{5}x$, podemos calcular $h(-20)$ da seguinte maneira:

  $h(-20) = -\frac{2}{5} \cdot (-20) \Rightarrow h(-20) = 8$

  Portanto, 8 é o valor da função h para $x = -20$.

Em uma função afim dada por $f(x) = ax + b$, os números reais ***a*** e ***b*** são chamados **coeficientes** e, de acordo com seus valores, a função afim recebe alguns nomes particulares que estudaremos a seguir.

• Função polinomial do 1º grau

Quando o coeficiente ***a*** da função afim é **diferente de zero**, a função recebe o nome de **função polinomial do 1º grau**, pois a relação entre a variável dependente e a variável independente é expressa por um polinômio do 1º grau.

Uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, com a e b reais e $a \neq 0$, é chamada de **função polinomial do 1º grau**.

Observe alguns exemplos de leis de função polinomial do 1º grau:

a) $f(x) = 2x - 1$, em que $a = 2$ e $b = -1$;

b) $y = 0{,}5x + \sqrt{2}$, em que $a = 0{,}5$ e $b = \sqrt{2}$;

c) $y = \frac{2}{3} + 2x$, em que $a = 2$ e $b = \frac{2}{3}$;

d) $f(x) = 4x$, em que $a = 4$ e $b = 0$.

LIVEWORKSHEETS

• Função identidade

Quando $a = 1$ e $b = 0$, a função polinomial do 1º grau é expressa pela lei $f(x) = x$ e é chamada **função identidade**.

> A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ é chamada de **função identidade**.

A função identidade recebe esse nome, pois associa cada valor de $x \in \mathbb{R}$ a ele mesmo. Por exemplo:

- $f(1) = 1$;
- $f(0{,}5) = 0{,}5$;
- $f(-3) = -3$;
- $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.

• Função linear

> Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax$, com a real, é chamada de **função linear**.

Observe alguns exemplos de leis de função linear:

a) $f(x) = -7x$, em que $a = -7$;

b) $y = x\sqrt{3}$, em que $a = \sqrt{3}$;

c) $y = -\frac{x}{3}$, em que $a = -\frac{1}{3}$;

d) $y = x$, em que $a = 1$.

• Função linear e proporcionalidade

> Em uma função linear, cuja lei de formação é dada por $y = ax$, com $a \neq 0$, quando $a > 0$, dizemos que as variáveis x e y representam **grandezas diretamente proporcionais**. A constante de proporcionalidade k é o coeficiente a da função.

• Função constante

Outro tipo de função afim é a **função constante**, definida a seguir.

> A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = b$, com b real, é chamada de **função constante**.

A função constante associa cada valor de $x \in \mathbb{R}$ sempre ao mesmo valor b. Nesse caso, o conjunto imagem da função constante é $\text{Im}(f) = \{b\}$.

Por exemplo, para a função constante f dada por $f(x) = 12$, todos os elementos de $D(f)$ têm imagem igual a 12. Veja alguns deles:

- $f(0) = 12$;
- $f(-3) = 12$;
- $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 12$;
- $f(\sqrt{2}) = 12$.

LIVEWORKSHEETS

Exemplos

01. Vinícius trabalha como *DJ* e cobra um valor fixo de R$ 250,00, além de um valor adicional de R$ 110,00 por hora, para animar uma festa.

▪ O serviço de DJ é bastante requisitado em festas de debutantes e de casamentos.

a) Indicando por y o valor total cobrado por Vinícius, em reais, e por x, a quantidade de horas trabalhadas, escreva a lei da função que relaciona y e x.

b) Essa lei de formação é de uma função afim? Justifique sua resposta.

c) Qual é o valor, em reais, que Vinícius receberá se trabalhar durante 2 horas em uma festa?

d) Sabendo que Vinícius recebeu R$ 635,00 pelo trabalho em determinada festa, por quantas horas ele prestou seu serviço?

Resolução

a) O valor y recebido por Vinícius depende da quantidade x de horas que ele trabalhou animando a festa. Assim, a lei que relaciona essas duas variáveis pode ser escrita como:
$y = 250 + 110x$ ou $y = 110x + 250$

b) Sim, essa lei de formação é de uma função afim, pois é do tipo $y = ax + b$, com a e b reais. Neste caso, $a = 110$ e $b = 250$.

c) Se o tempo de animação da festa for de 2 horas, então substituímos x por 2 na lei da função e determinamos o valor de y correspondente:
$y = 250 + 110 \cdot 2 \Rightarrow y = 250 + 220 \Rightarrow y = 470$
Portanto, Vinícius receberá R$ 470,00 por 2 horas de trabalho na festa.

d) Sabendo que ele recebeu R$ 635,00, substituímos y por 635 na lei da função e determinamos o valor de x:
$635 = 250 + 110x \Rightarrow 110x = 385 \Rightarrow x = 3{,}5$
Portanto, ele prestou serviço nessa festa por 3,5 h ou 3h30min.

02. (UEG-GO) Em uma fábrica, o custo de fabricação de 500 unidades de camisetas é de R$ 2700,00, enquanto o custo para produzir 1000 unidades é de R$ 3800,00. Sabendo que o custo das camisetas é dado em função do número produzido através da expressão $C(x) = qx + b$, em que x é a quantidade produzida e b é o custo fixo, determine:

a) Os valores de b e de q.

b) O custo de produção de 800 camisetas.

Resolução

a) De acordo com o enunciado:
- quando $x = 500$, temos $C(500) = 2\,700$;
- quando $x = 1000$, temos $C(1000) = 3\,800$.

Para determinar os valores de b e q, utilizamos as informações, substituindo os valores correspondentes na lei $C(x) = qx + b$, e resolvemos o sistema a seguir.

$$\begin{cases} 2\,700 = 500q + b \\ 3\,800 = 1000q + b \end{cases}$$

Multiplicamos por (-1) a primeira equação do sistema e adicionamos membro a membro as duas equações, como indicado a seguir.

$$\begin{array}{rcl} -2700 & = & -500q - b \\ \oplus\ \ 3800 & = & 1000q + b \quad \oplus \\ \hline 1100 & = & 500q \end{array}$$

Se $500q = 1\,100$, então $q = \frac{11}{5}$.

Substituindo q por $\frac{11}{5}$ na primeira equação do sistema, temos:

$2700 = 500 \cdot \frac{11}{5} + b \Rightarrow b = 1600$

Portanto, $b = 1600$ e $q = \frac{11}{5}$.

b) A lei da função que representa o custo das camisetas é $C(x) = \frac{11}{5}x + 1\,600$.

Substituindo $x = 800$ na lei da função, determinamos $C(800)$.

$C(800) = \frac{11}{5} \cdot 800 + 1600 \Rightarrow C(800) = 3360$

Portanto, o custo de produção de 800 camisetas é R$ 3.360,00.

03. Marcelo mora em um município onde é possível alugar patinetes elétricos para se locomover. A velocidade máxima permitida desses aparelhos é de 20 km/h, mas é recomendado que pessoas sem experiência não ultrapassem 12 km/h. Fazendo alguns cálculos para estimar o tempo que levaria utilizando um patinete elétrico de uma estação de metrô até o local onde trabalha, Marcelo considerou que manteria uma velocidade constante de 3 metros por segundo e fez uma tabela para relacionar a distância percorrida, em metro, em função do tempo, em segundo.

Distância *d* (em metro)	3	6	9	12	15	...
Tempo *t* (em segundo)	1	2	3	4	5	...

Com base nessas informações, responda:

a) Qual é a lei da função que relaciona a distância d, em metro, a ser percorrida por Marcelo e o tempo t, em segundo?

b) As grandezas representadas por d e t são diretamente proporcionais? Justifique sua resposta.

c) Marcelo levou 10 minutos para realizar o deslocamento que pretendia nas condições que tinha planejado. Qual distância ele percorreu?

Resolução

a) De acordo com os dados apresentados, verifica-se que, a cada segundo, Marcelo vai percorrer 3 metros de distância.
Essa relação corresponde a uma função linear, que pode ser representada pela lei $d(t) = 3t$.

b) Sim. Essa função é linear e o coeficiente a da função é igual a 3. Como $3 \neq 0$ e $3 > 0$, as grandezas representadas por d e t são grandezas diretamente proporcionais.
Também podemos verificar que, se multiplicarmos o valor de t por um número natural n, o valor correspondente de d também será multiplicado pelo mesmo número natural n.

c) Como Marcelo levou 10 minutos para realizar o percurso, isso equivale a 600 segundos $(10 \cdot 60 = 600)$.
Substituindo $t = 600$ na lei da função, temos:
$d(600) = 3 \cdot 600 \Rightarrow d(600) = 1800$
Portanto, Marcelo percorreu 1800 metros.

LIVEWORKSHEETS

Exercícios

01. Karina trabalha em um ateliê que confecciona sapatos e usa uma fórmula para calcular a numeração deles, de acordo com a medida de comprimento dos pés dos clientes.

MONKEY BUSINESS IMAGES/SHUTTERSTOCK.COM

- Os profissionais que trabalham na confecção de sapatos sob medida utilizam técnica e criatividade na criação dos modelos.

A fórmula utilizada por Karina é dada por $y = 1{,}25x + 7$, em que y é a numeração do sapato e x, a medida de comprimento do pé, em centímetro. Quando o resultado não é um número natural, ela o arredonda para o número natural imediatamente maior do que o valor calculado.

a) Determine a numeração do sapato de um cliente de Karina cujo pé mede 27 cm.

b) Considere agora sua numeração de sapato e utilize essa fórmula para calcular a medida de comprimento x correspondente. Depois, use uma régua para medir o comprimento do seu pé e confira se o valor calculado é um valor aproximado da medida verificada.

02. Considere as funções reais definidas a seguir.

I. $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$

II. $g(x) = -2x + \sqrt{3}$

III. $h(x) = \frac{2}{5}x$

IV. $i(x) = 0{,}01$

a) Qual(is) dessas leis é(são) de função afim?

b) Classifique as funções afins em função polinomial do 1º grau, função linear e/ou função constante.

c) Para as funções afins, identifique os valores dos coeficientes a e b.

03. Dada a função definida por $f(x) = 5x - 2$, determine:

a) $f(2)$;

b) o valor de x para $f(x) = 0$.

04. (FEI-SP) As locadoras X e Y alugam carros do mesmo tipo. A locadora X cobra uma diária fixa de R$ 100,00, mais R$ 1,30 por quilômetro rodado. A locadora Y cobra uma diária fixa de R$ 70,00, mais R$ 1,50 por quilômetro rodado. Assinale a alternativa correta. Se um indivíduo rodar:

a) 100 quilômetros em um dia, ele pagará R$ 230,00 na locadora Y.

b) 100 quilômetros em um dia, será mais vantajoso contratar a locadora X.

c) acima de 150 quilômetros em um dia, será mais vantajoso contratar a locadora X.

d) 200 quilômetros em um dia, ele pagará R$ 370,00 na locadora X.

e) 200 quilômetros em um dia, ele pagará a mesma quantia nas locadoras X e Y.

05. Considere uma função afim, dada por $y = h(x)$. Sabendo que $h(1) = 4$ e $h(-2) = 10$, escreva a lei da função h e calcule $h\left(-\frac{1}{2}\right)$.

06. Dada a função f definida por $f(x) = ax + 2$, determine o valor de a para que se tenha $f(4) = 20$.

07. Sofia quer produzir folhetos com a propaganda de sua empresa. Na gráfica **A**, o valor da impressão desse folheto, por unidade, é R$ 0,30. A gráfica **B** cobra R$ 0,25 para impressão de cada unidade.

a) Escreva a fórmula que relaciona o valor y a ser pago pela impressão, em reais, com o número x de folhetos impressos em cada uma dessas gráficas.

LIVEWORKSHEETS

b) Na gráfica **A**, o valor pago pela impressão é diretamente proporcional ao número de unidades impressas? E na gráfica **B**? Justifique.

c) Se Sofia encomendar 1000 folhetos na gráfica **B**, quantos reais gastará?

08. Sabendo que f é uma função linear e que $f(-3) = 4$, determine o valor de $f(6)$.

09. Os lados de um retângulo medem x e $(x + 5)$, em metro.

a) Escreva a fórmula matemática que relaciona o perímetro p desse retângulo com a medida x.

b) Reproduza a tabela a seguir no caderno e complete-a com os valores que faltam.

***x* (em metro)**	5	10	20	30		
***p* (em metro)**					162	210

c) As grandezas p e x são diretamente proporcionais? Por quê?

d) Quais devem ser as medidas dos lados desse retângulo para que o perímetro seja de 78 metros?

10. (FGV-SP) Uma função polinomial f do 1º grau é tal que $f(3) = 6$ e $f(4) = 8$. Portanto, o valor de $f(10)$ é:

a) 16
b) 17
c) 18
d) 19
e) 20

11. Considere que uma pessoa, caminhando a uma velocidade constante, percorra, em média, 80 centímetros a cada 1 segundo.

ALF RIBEIRO/SHUTTERSTOCK.COM

▪ A caminhada é uma atividade física que pode ser realizada por pessoas de todas as idades, desde que avaliadas por um médico.

a) Escreva a fórmula que indica a distância percorrida d, em centímetro, em função do tempo t, em segundo.

b) Nessa situação, a distância (d) e o tempo (t) são grandezas diretamente proporcionais? Justifique sua resposta.

c) Quantos metros uma pessoa nessas condições percorrerá em 10 segundos? E em 40 segundos?

d) Quantos segundos uma pessoa nessas condições levará para percorrer 100 metros?

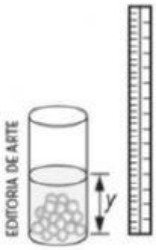
12. (UFC-CE) Seja f uma função real, de variável real, definida por $f(x) = ax + b$. Se $f(1) = -9$ e $b^2 - a^2 = 54$, calcule o valor de $a - b$. 6

SAIBA QUE...

O produto da soma pela diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo.

$$(b + a) \cdot (b - a) = b^2 - a^2$$

13. (Enem/MEC) Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água até certo nível e medir o nível da água, conforme ilustrado na figura a seguir. Como resultado do experimento, concluiu-se que o nível da água é função do número de bolas de vidro que são colocadas dentro do copo. O quadro a seguir mostra alguns resultados do experimento realizado.



EDITORIA DE ARTE

número de bolas *(x)*	**nível da água *(y)***
5	6,35 cm
10	6,70 cm
15	7,05 cm

Disponível em: www.penta.ufrgs.br. Acesso em: 13 jan. 2009 (adaptado).

Qual a expressão algébrica que permite calcular o nível da água (y) em função do número de bolas (x)?

a) $y = 30x$.
b) $y = 25x + 20{,}2$.
c) $y = 1{,}27x$.
d) $y = 0{,}7x$.
e) $y = 0{,}07x + 6$.

LIVEWORKSHEETS