• Gráfico de uma função

De modo geral, as funções podem ser representadas graficamente no **sistema cartesiano ortogonal**. Vamos relembrar algumas ideias e conceitos desse sistema de coordenadas no caso bidimensional.

➢ **Sistema cartesiano ortogonal**

Para determinar a localização de um ponto no plano, utilizamos o sistema cartesiano ortogonal, que é estabelecido por duas retas perpendiculares entre si, denominadas **eixos** do sistema cartesiano. Esses eixos representam retas reais, e o ponto *O*, de intersecção desses eixos, é a **origem** do sistema cartesiano.

O eixo horizontal (eixo *x*) é denominado **eixo das abscissas**, e o eixo vertical (eixo *y*) é denominado **eixo das ordenadas**. Esses eixos dividem o plano em quatro regiões, chamadas de **quadrantes**, como indicado na figura.

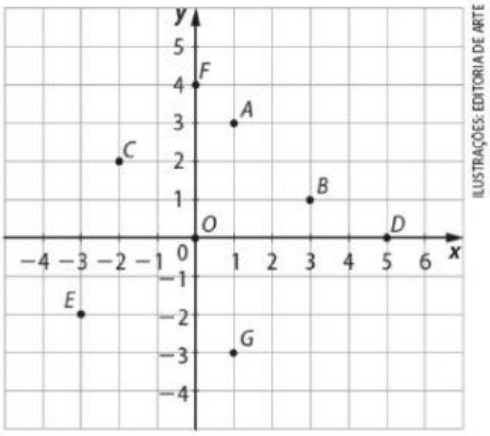
O ponto *P* representado nessa figura tem **coordenadas cartesianas** *a* e *b*, números reais que formam o **par ordenado (*a*, *b*)**. Indicamos assim: *P*(*a*, *b*).

O número real *a* é a **abscissa** do ponto *P*. Esse número é associado ao ponto de intersecção do **eixo *x*** com a reta paralela ao eixo *y*, passando por *P*. O número real *b* é a **ordenada** do ponto *P*. Esse número é associado ao ponto de intersecção do **eixo *y*** com a reta paralela ao eixo *x*, passando por *P*.

Qualquer ponto do plano pode ser localizado no sistema cartesiano e, para isso, usamos um par ordenado de números reais, que são as coordenadas do ponto. Observe, a seguir, como localizar alguns pontos no sistema cartesiano e verifique que os pontos *A*(1, 3) e *B*(3, 1) são pontos distintos e têm diferentes localizações no plano.

Observações:

- O ponto *O* (origem) tem coordenadas (0, 0).
- Os pontos dos eixos *x* e *y* não pertencem a nenhum dos quadrantes.
- Todo ponto do eixo *x* tem ordenada igual a zero.
- Todo ponto do eixo *y* tem abscissa igual a zero.

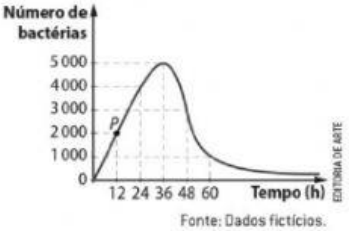


➢ **Interpretação e leitura de gráficos**

Um gráfico é uma representação geométrica de dados que nos permite visualizar relações entre grandezas.

Por exemplo, ao analisar o caso de um paciente em tratamento, infectado por determinado tipo de bactéria, um médico detectou que o número dessas bactérias, por milímetro cúbico de sangue, variou com o passar do tempo, aproximadamente, conforme mostra o gráfico.

> Evolução do número de bactérias no sangue



Fonte: Dados fictícios.

LIVEWORKSHEETS

Nesse exemplo, o tempo é dado em hora, o instante zero corresponde ao momento do contágio e o número de bactérias é dado por mm^3 de sangue.

Para observar como o gráfico determina a correspondência entre o tempo e o número de bactérias, escolhemos um ponto P do gráfico e, em seguida, determinamos as coordenadas cartesianas desse ponto. Essa análise pode ser feita para qualquer ponto do gráfico.

Considere, por exemplo, o ponto P indicado no gráfico anterior e verifique que a abscissa do ponto P é 12 e a ordenada, 2 000, ou seja, as coordenadas do ponto P são (12, 2 000). Isso significa que 12 horas após o contágio havia 2 000 bactérias por milímetro cúbico (mm^3) de sangue desse paciente.

De modo análogo, podemos obter outras informações por meio desse gráfico, entre elas:

- a quantidade máxima de bactérias observada em cada milímetro cúbico de sangue é identificada, aproximadamente, 36 horas após o contágio;
- 60 horas após o contágio, a quantidade de bactérias em cada milímetro cúbico de sangue é 1 000 por mm^3;
- o número de bactérias aumentou no intervalo de 0 a 36 horas.

Observe que cada instante corresponde a um único número de bactérias por milímetro cúbico de sangue. Com isso, verificamos que o número de bactérias por milímetro cúbico de sangue varia em função do tempo transcorrido após o contágio e, além disso, dizemos que o tempo é a variável independente e o número de bactérias por milímetro cúbico de sangue é a variável dependente.

➢ Construção de gráficos

Para construir gráficos de funções no sistema cartesiano ortogonal, devemos considerar os valores do domínio da função no eixo x (eixo das abscissas) e as respectivas imagens no eixo y (eixo das ordenadas).

O gráfico da função é o conjunto de todos os pontos (x, y) do plano cartesiano, tais que $y = f(x)$ com $x \in D(f)$.

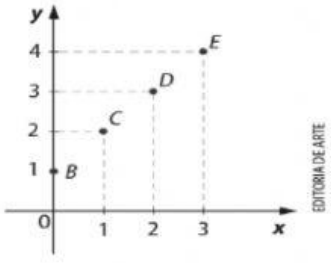
Como exemplo, vamos construir o gráfico da função $f: A \to \mathbb{R}$, dada por $y = x + 1$, em que $A = \{0, 1, 2, 3\}$.

Iniciamos construindo a tabela com os valores de x pertencentes ao domínio e determinando as imagens de x pela função f, ou seja, os valores de $y = f(x)$ para representar os pontos obtidos no plano cartesiano.

x	y	
0	1	$B(0, 1)$
1	2	$C(1, 2)$
2	3	$D(2, 3)$
3	4	$E(3, 4)$

Observe que $D(f) = A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $Im(f) = \{1, 2, 3, 4\}$.

Como o conjunto A é finito, o gráfico de f é formado apenas pelos quatro pontos obtidos por meio da tabela: $B(0, 1)$, $C(1, 2)$, $D(2, 3)$ e $E(3,4)$. Para concluir, representamos esses pontos no sistema cartesiano, como mostra a figura ao lado.



EDITORIA DE ARTE

Agora, vamos construir o gráfico da função f dada por $f(x) = 2x + 3$, considerando três domínios distintos, e observar as semelhanças e as diferenças entre esses gráficos.

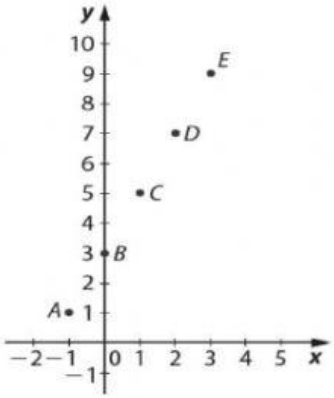
LIVEWORKSHEETS

a) Considerando $D(f) = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

Inicialmente, construímos uma tabela com os valores de $x \in D(f)$ e determinamos as imagens de x pela função f, ou seja, os valores de $y = f(x)$ para obter os respectivos pares ordenados.

x	$y = 2x + 3$	(x, y)
-1	$y = 2 \cdot (-1) + 3 = -2 + 3 = 1$	$(-1, 1)$
0	$y = 2 \cdot (0) + 3 = 0 + 3 = 3$	$(0, 3)$
1	$y = 2 \cdot (1) + 3 = 2 + 3 = 5$	$(1, 5)$
2	$y = 2 \cdot (2) + 3 = 4 + 3 = 7$	$(2, 7)$
3	$y = 2 \cdot (3) + 3 = 6 + 3 = 9$	$(3, 9)$

Em seguida, representamos no sistema cartesiano os pontos cujas coordenadas são os pares ordenados da tabela.

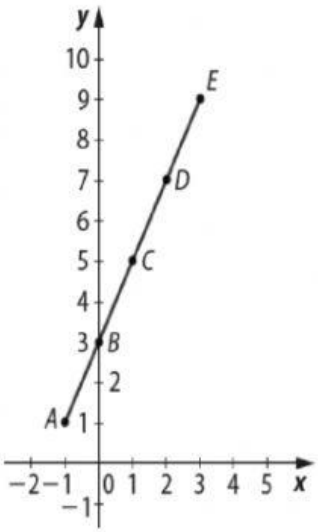


Como o domínio da função é o conjunto $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$, o gráfico de f são os pontos $A(-1, 1)$, $B(0, 3)$, $C(1, 5)$, $D(2, 7)$ e $E(3, 9)$ representados nessa figura.

b) Considerando $D(f) = [-1, 3]$.

Nesse caso, o domínio da função é um intervalo real e os valores de x considerados no exemplo anterior pertencem a esse intervalo. Entretanto, no intervalo $[-1, 3]$ existem infinitos valores de x que têm imagem correspondente pela função f.

Quando representamos esses infinitos pontos no sistema cartesiano, obtemos um segmento de reta, que é o gráfico da função f quando $D(f) = [-1, 3]$.



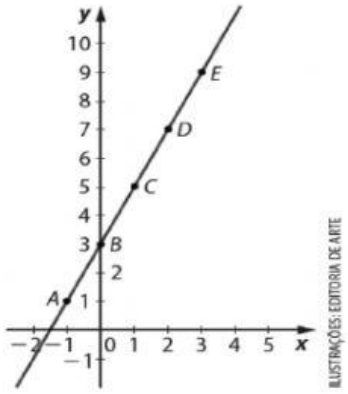
Observe que essa função não está definida para valores de x menores do que -1 nem para valores de x maiores do que 3.

LIVEWORKSHEETS

c) Considerando $D(f) = \mathbb{R}$.

Nesse caso, o domínio de f é todo o conjunto dos números reais e, como nos exemplos anteriores, os pontos A, B, C, D e E fazem parte do gráfico da função. Além desses pontos, existem infinitos pontos que satisfazem à lei da função f.

Assim, o gráfico de f é uma reta em que todo valor de $x \in \mathbb{R}$ tem uma imagem pela função f, expressa por $y = f(x)$. Observe o gráfico da função f quando $D(f) = \mathbb{R}$.



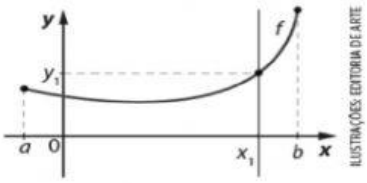
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Portanto, apesar de a lei que define a função ser a mesma nos três casos apresentados anteriormente, os gráficos são diferentes, pois dependem do domínio considerado.

➢ Identificação do gráfico de uma função

Vimos que, dada uma função definida por $y = f(x)$, cada valor de x do domínio deve corresponder a um único valor de y no contradomínio. Assim, é possível identificar se um gráfico representa ou não uma função traçando retas paralelas ao eixo y.

Para que o gráfico analisado represente uma função, cada reta vertical traçada por pontos de abscissa $x \in D(f)$ deve cruzar o gráfico em **um único ponto**, de coordenadas $(x, f(x))$.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

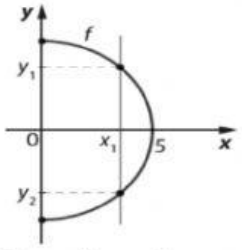
▪ Este gráfico representa uma função.

O gráfico ao lado, por exemplo, representa uma função f com domínio $D(f) = [a, b]$, pois qualquer reta vertical traçada por pontos de abscissa $x \in D(f)$ cruza o gráfico em um único ponto.

Verifique, nesse gráfico, que todas as abscissas $x_1 \in D(f)$ estão associadas a uma única imagem $y_1 = f(x_1)$, ou seja, para todo $x \in D(f)$ existe um único ponto que pertence ao gráfico e à reta que passa por $(x, 0)$ e é perpendicular ao eixo x.

Se uma reta vertical cruza o gráfico em **mais de um ponto**, então esse gráfico **não** representa uma função, como indicado ao lado.

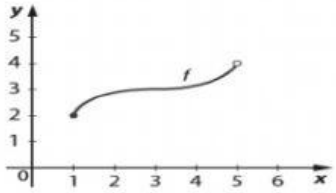
Nesse caso, existem retas paralelas ao eixo y que cruzam o gráfico em dois pontos. Verifique, por exemplo, que a abscissa x_1 está associada a dois pontos distintos do gráfico, (x_1, y_1) e (x_1, y_2), o que permite concluir que esse gráfico não representa uma função de x em y.



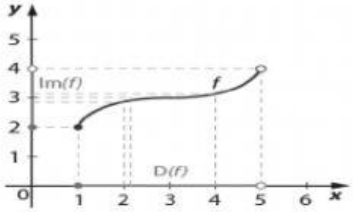
▪ Este gráfico **não** representa uma função de x em y.

➢ Domínio e imagem no gráfico de uma função

Considere o gráfico a seguir, que representa uma função f.



Para determinar o domínio e o conjunto imagem de f, projetamos os pontos do gráfico sobre os eixos x e y, como indicado a seguir.



O domínio da função f é o conjunto das abscissas de todos os pontos do gráfico. Nesse exemplo, temos:

$$D(f) = [1, 5[\text{ ou } D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 5\}$$

O conjunto imagem da função f é o conjunto das ordenadas de todos os pontos do gráfico. Nesse exemplo, temos:

$$Im(f) = [2, 4[\text{ ou } Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 2 \leq y < 4\}$$

LIVEWORKSHEETS

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

01. Os pares ordenados $(a - 1, 3)$ e $(-2, 2b + 1)$ representam o mesmo ponto P no sistema cartesiano.

a) Determine os valores de a e b.

b) Escreva as coordenadas do ponto P.

Resolução

a) Como os pares ordenados representam o mesmo ponto P, as abscissas $a - 1$ e -2 são iguais, assim como as ordenadas 3 e $2b + 1$. Então, obtemos os valores de a e de b resolvendo as seguintes equações:

$a - 1 = -2 \Rightarrow a = -2 + 1 \Rightarrow a = -1$

$2b + 1 = 3 \Rightarrow 2b = 3 - 1 \Rightarrow b = 1$

b) Com os valores de a e b, substituímos em um dos pares ordenados para obter as coordenadas do ponto P.

$a - 1 = -1 - 1 = -2$

Portanto, as coordenadas de P são $(-2, 3)$.

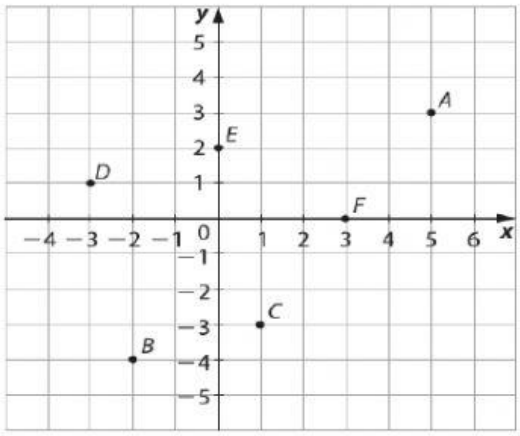
02. Considere os pontos a seguir e determine, quando possível, a qual quadrante cada ponto pertence.

$A(5, 3)$ $B(-2, -4)$ $C(1, -3)$ $D(-3, 1)$ $E(0, 2)$ $F(3, 0)$

Resolução

Uma possível maneira de resolver essa atividade é localizar os pontos no sistema cartesiano. Nesse caso, temos:

EDITORIA DE ARTE



Analisando o gráfico, obtemos o seguinte:

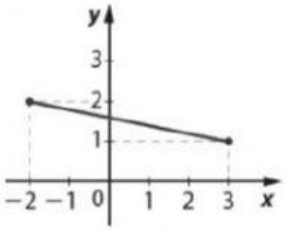
- no 1º quadrante, o ponto $A(5, 3)$;
- no 2º quadrante, o ponto $D(-3, 1)$;
- no 3º quadrante, o ponto $B(-2, -4)$;
- no 4º quadrante, o ponto $C(1, -3)$.

O ponto $E(0, 2)$ está sobre o eixo y. Logo, não pertence a quadrante nenhum.

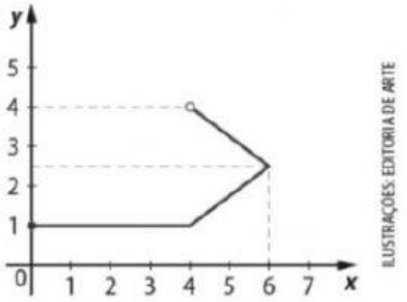
O ponto $F(3, 0)$ está sobre o eixo x. Logo, não pertence a quadrante nenhum.

LIVEWORKSHEETS

03. Observe os gráficos a seguir.



■ Gráfico **I**



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

■ Gráfico **II**

Agora, responda às questões.

a) Qual desses gráficos representa uma função de x em y? Justifique sua resposta.

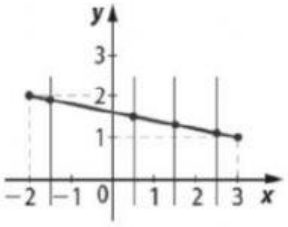
b) Determine o domínio $D(f)$ e o conjunto imagem $Im(f)$ do gráfico que representa uma função de x em y.

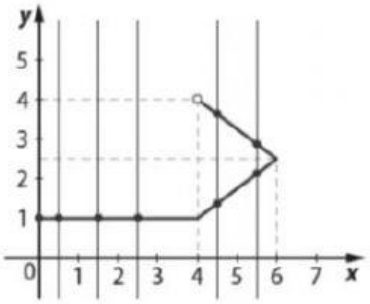
Resolução

a) Traçando retas paralelas ao eixo y que cruzam os gráficos, verificamos o seguinte:

O gráfico **I** representa uma função de x em y, pois qualquer reta paralela ao eixo y que cruza o gráfico o faz em um único ponto.

O gráfico **II** não representa uma função de x em y, pois existem retas paralelas ao eixo y que cruzam o gráfico em dois pontos.





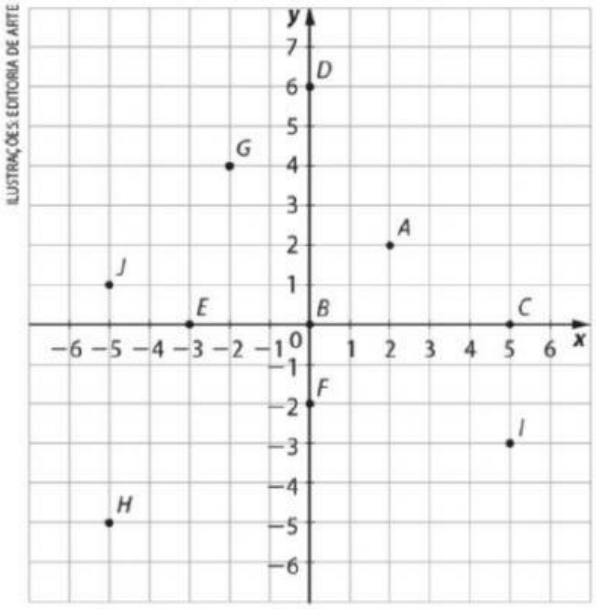
b) Projetando ortogonalmente os pontos do gráfico **I** nos eixos x e y, obtemos:

A projeção ortogonal dos pontos desse gráfico no eixo das abscissas é o segmento de reta, contido no eixo x, de extremidades em -2 e 3. Portanto: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$ ou $D(f) = [-2, 3]$.
A projeção ortogonal dos pontos desse gráfico no eixo das ordenadas é o segmento de reta, contido no eixo y, de extremidades 1 e 2. Portanto: $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 2\}$ ou $Im(f) = [1, 2]$.

LIVEWORKSHEETS

Exercícios

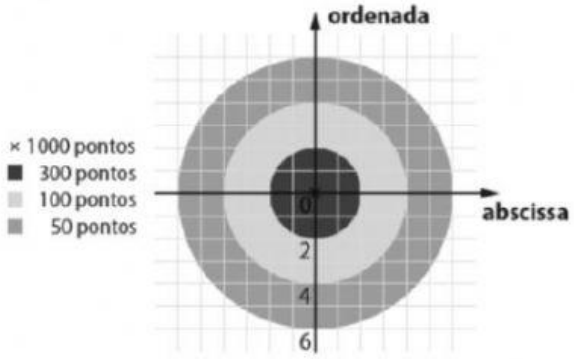
01. Determine as coordenadas dos pontos indicados na figura.



02. Dados os pares ordenados $(2a - 3, b + 2)$ e $(5a - 1, 2b - 3)$ e sabendo que representam o mesmo ponto no sistema cartesiano, quais são os valores de a e b?

03. (OBMEP) Manoel testa sua pontaria lançando 5 flechas que atingiram o alvo nos pontos A, B, C, D e E de coordenadas $A = (1, -1)$, $B = (2{,}5; 1)$, $C = (-1, 4)$, $D = (-4, -4)$ e $E = (6, 5)$.

A tabela mostra quantos pontos se ganha quando a flecha acerta um ponto dentro de cada uma das três regiões, conforme mostra a figura.



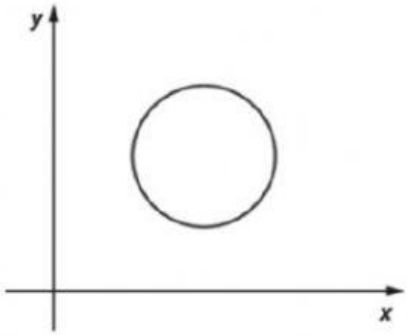
a) Marque os pontos A, B, C, D e E.

b) Quantas flechas ele acertou no interior do menor círculo?

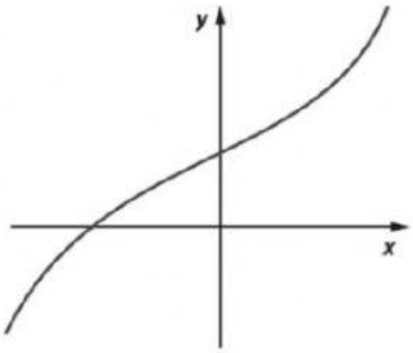
c) Ao todo, quantos pontos Manoel fez?

04. Analise cada gráfico a seguir e verifique se representa ou não representa uma função de x em y. Justifique sua resposta.

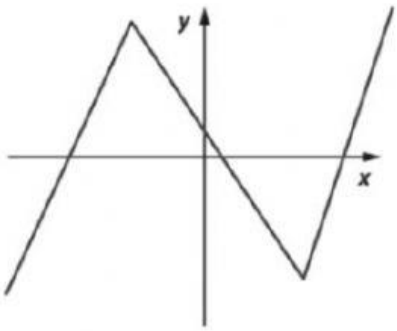
a)



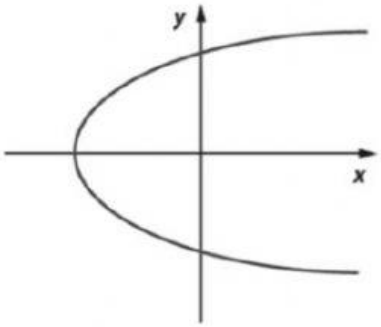
b)



c)



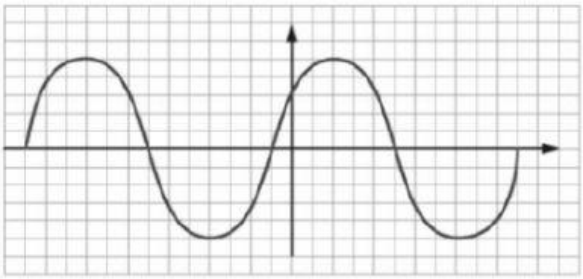
d)



- Algum dos gráficos representa uma função de y em x? Justifique.

LIVEWORKSHEETS

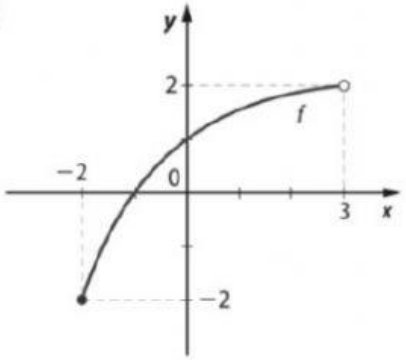
05. Observando uma curva que aparecia no monitor de um osciloscópio, Paulo questionou seu colega se ela poderia ou não poderia representar uma função.



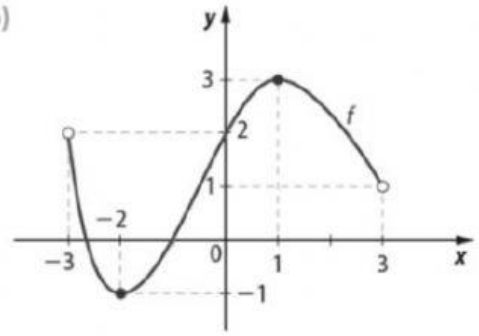
O que você responderia a Paulo? Justifique.

06. Os esboços dos gráficos a seguir representam funções de x em y. Observando-os, determine o domínio $D(f)$ e o conjunto imagem $Im(f)$ de cada função.

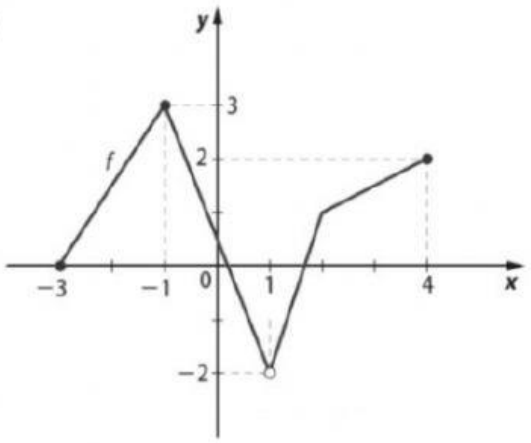
a)



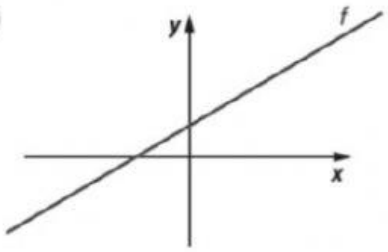
b)



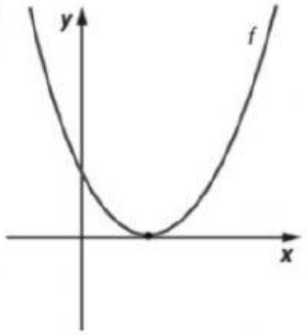
c)



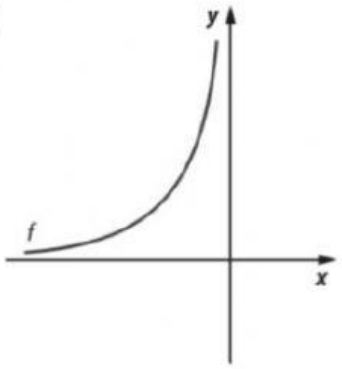
d)



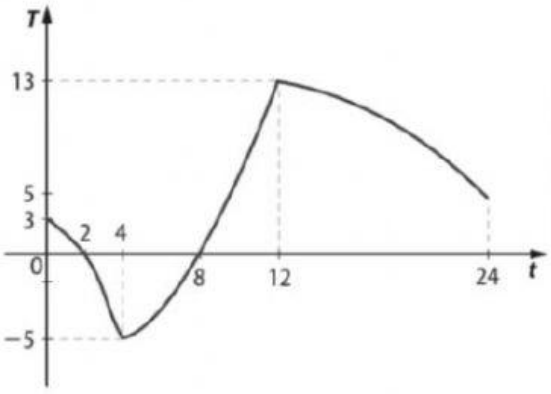
e)



f)



07. (UFV-MG) O gráfico a seguir ilustra a evolução da temperatura T (°C), em uma região ao longo de um período de 24 horas.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Determine:

a) os horários em que a temperatura atinge 0 °C;

b) o intervalo de variação da temperatura ao longo das 24 horas;

c) os intervalos de tempo em que a temperatura é positiva.

LIVEWORKSHEETS