• Razão entre áreas de polígonos Semelhantes

Dois polígonos são **semelhantes** quando satisfazem duas condições: os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais.

No Ensino Fundamental, você provavelmente estudou a semelhança de triângulos. A partir dessa semelhança, algumas consequências podem ser demonstradas. Veja, a seguir, uma delas.

Se dois triângulos são semelhantes, com razão de semelhança k, então:

I. a razão entre os perímetros também é k;

II. a razão entre duas alturas homólogas também é k;

III. a razão entre duas bissetrizes homólogas também é k;

IV. a razão entre as áreas é igual a k^2.

Podemos definir o que são polígonos semelhantes:

É possível demonstrar que as consequências **I** a **IV** apresentadas são válidas para figuras que podem ser decompostas em um número finito de polígonos.

➢ Ladrilhamento do plano

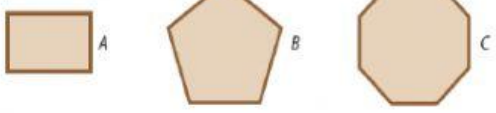
Na instalação de pisos e azulejos em cozinhas e banheiros, por exemplo, o termo usado na construção civil é "assentar" (o piso ou o azulejo). Nesse processo, para obter um bom acabamento, os profissionais precisam recobrir a maior área possível utilizando apenas peças inteiras. Porém, normalmente, é necessário fazer o que chamam de "recorte", assentando pedaços dessas peças para recobrir totalmente a superfície.

Em Matemática, a ideia de ladrilhamento está associada ao recobrimento do plano utilizando determinadas composições de polígonos.

Considere a situação a seguir.

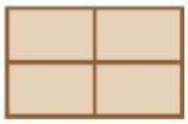
Carlos foi contratado para assentar pisos em determinada superfície retangular. Para obter um bom acabamento, ele pretende recobrir a maior área possível dessa superfície utilizando apenas pisos inteiros e de um único modelo, dentre os modelos A, B ou C indicados a seguir.

Modelos de pisos



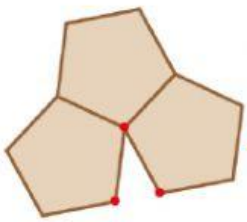
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Se Carlos utilizar o piso do modelo A, poderá compor um ladrilhamento seguindo o padrão indicado a seguir. Note que, para determinar esse padrão, não é necessário realizar nenhum recorte do piso do modelo A.

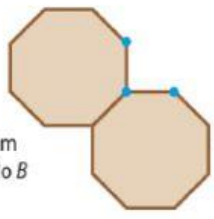


Composição com pisos do modelo A

Porém, se Carlos utilizar o piso do modelo B ou do modelo C, ele teria as seguintes situações:



Composição com pisos do modelo B



Composição com pisos do modelo C

Observe que na composição com pisos do modelo B não é possível encaixar um novo piso desse mesmo modelo na região triangular determinada pelos pontos destacados em vermelho. Também, na composição com pisos do modelo C, não é possível encaixar um novo piso desse modelo para recobrir a região triangular determinada pelos pontos destacados em azul.

LIVEWORKSHEETS

Isso indica que, ao utilizar o piso do modelo *B*, no mínimo a cada três pisos assentados, Carlos teria de fazer um recorte do piso original. Semelhantemente, ao utilizar o piso do modelo *C*, no mínimo a cada dois pisos assentados, seria necessário realizar ao menos um recorte do piso original.

Assim, ao utilizar o modelo *B* ou o modelo *C*, seria necessário fazer mais recortes nos pisos para conseguir recobrir toda a superfície retangular. Portanto, o modelo *A* é mais adequado à necessidade de Carlos.

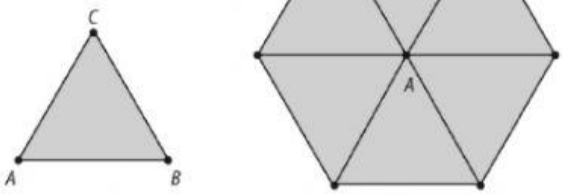
Essa situação nos dá ideia do que, em Matemática, denominamos **ladrilhamento do plano**, que é o recobrimento do plano com base em determinado padrão geométrico. Esse padrão pode ser composto de um único polígono ou da combinação de diferentes polígonos.

Então, surge uma questão: será que é possível ladrilhar um plano utilizando qualquer padrão geométrico? A resposta para essa pergunta é não!

Os polígonos utilizados para fazer o ladrilhamento devem obedecer às seguintes condições:

- a intersecção entre os polígonos é sempre um vértice ou um lado ou é vazia;
- a distribuição ao redor de cada vértice é sempre a mesma, obedecendo a um padrão.

Considere um triângulo equilátero *ABC*.

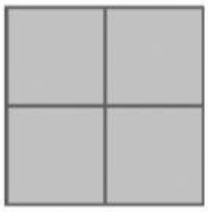


É possível compor um ladrilhamento com seis triângulos equiláteros congruentes ao triângulo *ABC*, todos concorrendo no vértice *A*.

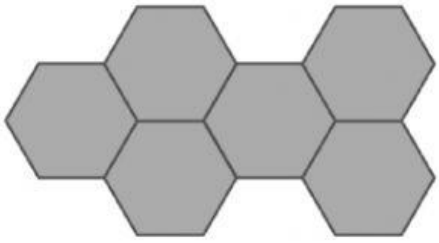
Denotamos esse ladrilhamento por 3.3.3.3.3.3 ou {6, 3}. A notação {6, 3} indica que são seis vértices coincidentes e que o polígono regular considerado possui três lados.

Veja outros exemplos:

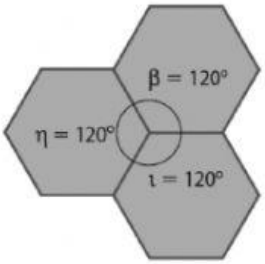
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE



- Notação: {4, 4}, ou seja, quatro vértices coincidem, e o polígono regular possui quatro lados.



- Notação: {3, 6}, ou seja, três vértices coincidem, e o polígono regular possui seis lados.

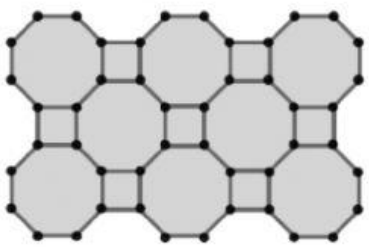


- A medida do ângulo interno de um hexágono regular é 120°.

Para ser possível obter um ladrilhamento, é necessário que a soma da medida dos ângulos internos dos polígonos, relativos aos vértices coincidentes, seja 360°.

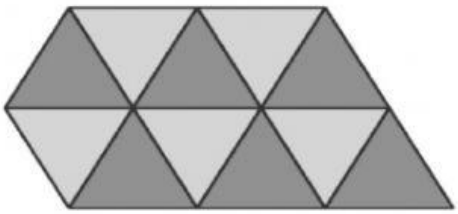
O ladrilhamento do plano também pode ser feito pela composição de dois ou mais polígonos regulares convexos com lados congruentes, de modo que o padrão de cada vértice obedeça sempre à mesma ordem.

A figura a seguir representa uma maneira de obter o ladrilhamento do plano utilizando octógonos regulares e quadrados.



LIVEWORKSHEETS

Os ladrilhamentos também podem ser feitos com alguns polígonos congruentes, ainda que sejam não regulares. Na figura a seguir, por exemplo, o padrão geométrico utilizado é composto de triângulos que não são regulares.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

1 Considere dois pentágonos regulares cuja medida do lado do primeiro pentágono é o dobro da medida do lado do segundo. Sabendo que a área do primeiro pentágono é 200 cm², determine a área do segundo pentágono regular.

Resolução

Polígonos regulares de mesmo número de lados são sempre semelhantes entre si.

Sendo ℓ_1 a medida do lado do primeiro pentágono e ℓ_2 a medida do lado do segundo, temos:

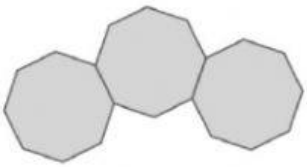
$$\ell_1 = 2\ell_2 \Rightarrow \frac{\ell_1}{\ell_2} = 2 = k \text{ (razão de semelhança entre os lados)}$$

Indicando por A_1 a área do primeiro pentágono e por A_2 a área do segundo, a razão entre as duas áreas deve ser igual ao quadrado de k. Logo:

$$\frac{A_1}{A_2} = k^2 \Rightarrow \frac{200}{A_2} = 2^2 \Rightarrow \frac{200}{A_2} = 4 \Rightarrow A_2 = 50$$

Portanto, a área do segundo pentágono regular é igual a 50 cm².

2 Para fazer o ladrilhamento de uma superfície, Caio comprou pisos em formato de octógonos regulares. Ao iniciar o trabalho de revestimento, notou que não seria possível recobrir todo o piso. Observe:



a) Explique o motivo pelo qual Caio não conseguirá ladrilhar a superfície usando somente pisos nesse formato.

b) Caio resolveu voltar à loja para comprar algum outro piso que se encaixe perfeitamente ao ladrilhamento já iniciado. Ele deve procurar por pisos no formato de qual polígono regular?

Resolução

a) A medida do ângulo interno no octógono regular é dada por $\beta = \frac{(8-2)\cdot 180°}{8} = 135°$ e 135 não é divisor de 360.

Com dois octógonos regulares, a soma dos ângulos justapostos em um mesmo vértice é 270°; com três octógonos regulares, essa soma passa a 405°. Assim, usando somente octógonos regulares não é possível ladrilhar o piso.

b) Sabemos que a medida de cada ângulo interno do octógono regular é igual a 135°. Assim, temos:

$2 \cdot 135° + x = 360°$, em que x é a medida do ângulo do polígono regular desconhecido.

Assim, temos: $x = 360° - 270°$

Logo, $x = 90°$.

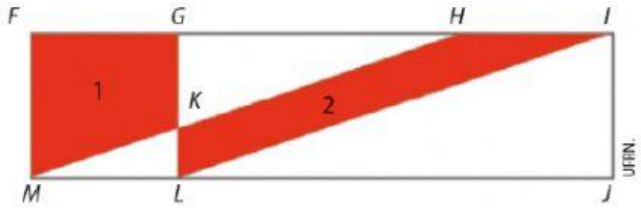
O polígono regular que possui ângulos iguais a 90° é o quadrado.

LIVEWORKSHEETS

Exercícios

1. Justifique se a afirmação seguinte é verdadeira ou falsa:
"Se triplicarmos a medida do lado de um quadrado, então sua área também triplicará.".

2. (UFRN) Miguel pintará um painel retangular com motivos geométricos. As duas regiões destacadas, a região 1 (*FGKM*), contida no quadrado *FGLM*, e a região 2 (*HILK*), contida no paralelogramo *HILM*, conforme figura abaixo, serão pintadas de vermelho. Sabe-se que a tinta utilizada para pintar uma região qualquer depende proporcionalmente de sua área.



Se Miguel gastasse, na pintura da região 1, $\frac{3}{7}$ da tinta vermelha de que dispõe, poderíamos afirmar que

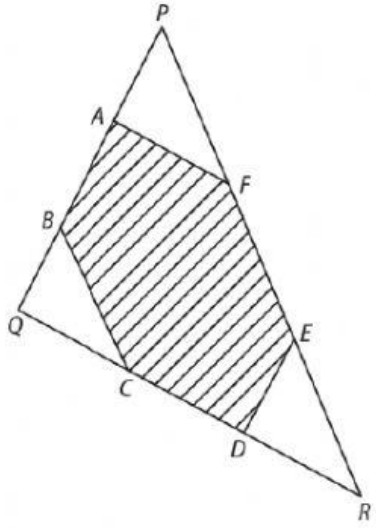
a) o restante de tinta vermelha daria, exatamente, para a pintura da região 2.
b) o restante de tinta vermelha seria insuficiente para a pintura da região 2.
c) a região 2 seria pintada e ainda sobrariam $\frac{3}{7}$ de tinta vermelha.
d) a região 2 seria pintada e ainda sobraria $\frac{1}{7}$ de tinta vermelha.

3. (Mack-SP) Um engenheiro fez a planta de um apartamento, de modo que cada centímetro do desenho corresponde a 50 centímetros reais. Então a área real de um terraço que tem 20 cm² na planta é, em metros quadrados, igual a:

a) 2
b) 4
c) 5
d) 8
e) 10

4. Ao utilizarmos a combinação de dois hexágonos regulares e dois triângulos equiláteros, cujos lados tenham a mesma medida, é possível ladrilhar o plano? Justifique sua resposta.

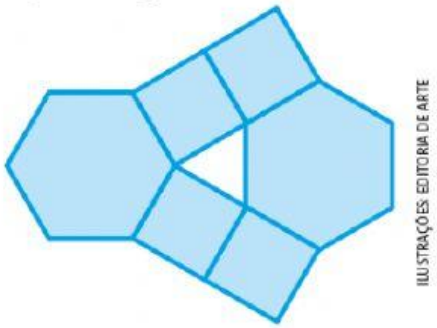
5. (Unip-SP) PQR é um triângulo com 27 cm² de área. *A*, *B*, *C*, *D*, *E* e *F* são pontos médios dos segmentos *PB*, *AQ*, *QD*, *CR*, *RF* e *EP*, respectivamente.



A área da região hachurada, em centímetros quadrados, é:

a) 9
b) 12
c) 15
d) 18
e) 21

6. Observe o ladrilhamento a seguir, composto de polígonos regulares.



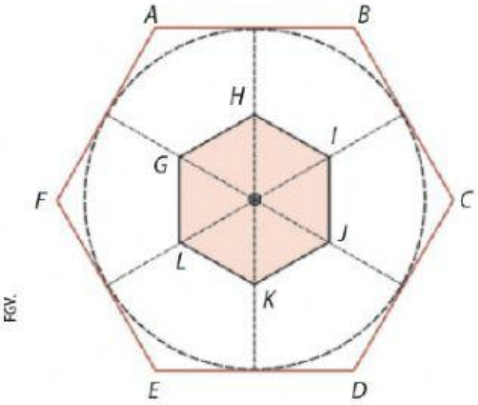
a) Identifique os polígonos que estão destacados em azul.
b) Na parte central desse ladrilhamento, há um polígono. Diga qual é esse polígono, justificando sua resposta.

7. .O pátio de uma escola tem formato retangular, com 3,5 m de largura por 5,5 m de comprimento. A direção decidiu recobrir essa área com ladrilhos quadrados com 12 cm de lado. Quantos ladrilhos serão necessários para revestir todo o pátio?

LIVEWORKSHEETS

8. Usando um *software* de geometria dinâmica, como o **GeoGebra**, investigue se é possível fazer um ladrilhamento utilizando apenas pentágonos regulares. Registre o passo a passo do resultado e justifique suas conclusões.

9. (FGV-SP) A figura indica um hexágono regular *ABCDEF*, de área S_1, e um hexágono regular *GHIJKL*, de vértices nos pontos médios dos apótemas do hexágono *ABCDEF* e área S_2.



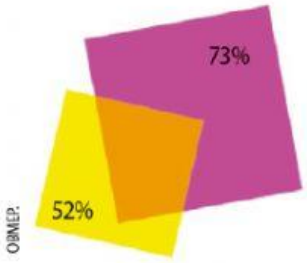
FGV.

Nas condições descritas, $\frac{S_2}{S_1}$ é igual a

a) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{7}{25}$ e) $\frac{3}{16}$

b) $\frac{8}{25}$ d) $\frac{1}{5}$

10. (OBMEP) Dois quadrados de papel se sobrepõem como na figura. A região não sobreposta do quadrado menor corresponde a 52% de sua área e a região não sobreposta do quadrado maior corresponde a 73% de sua área. Qual é a razão entre o lado do quadrado menor e o lado do quadrado maior?



OBMEP.

a) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{4}{5}$

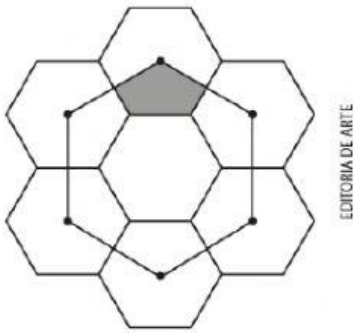
b) $\frac{5}{8}$ d) $\frac{4}{7}$

11. Uma construtora decidiu inovar e encomendou ladrilhos no formato de dodecágonos regulares (polígonos de 12 lados congruentes). Ao se depararem com esses ladrilhos de formato inusitado, alguns pedreiros disseram que não seria possível usar apenas esse ladrilho, pois sobraria espaço entre eles. Ao ouvir os colegas, o mestre de obras encontrou a solução para esse problema. Ele afirmou que somente com os ladrilhos no formato de dodecágonos regulares, de fato, não era possível recobrir todo o piso, mas se esses ladrilhos fossem combinados com outro tipo de ladrilho poligonal, o problema estaria resolvido.

a) Explique por que não é possível usar somente os ladrilhos em formato de dodecágono regular para cobrir todo o piso, sem deixar espaço. Se possível, utilize um *software* de geometria dinâmica para auxiliar na sua explicação.

b) Considerando a solução dada pelo mestre de obras, que tipo de ladrilho seria possível combinar com o dodecágono regular para satisfazer às condições de ladrilhamento?

12. (Fuvest-SP) A figura representa sete hexágonos regulares de lado 1 e um hexágono maior, cujos vértices coincidem com os centros de seis dos hexágonos menores. Então, a área do pentágono hachurado é igual a:


EDITORIA DE ARTE

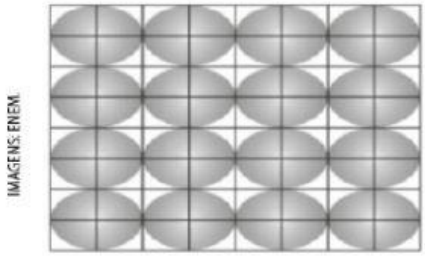
a) $3\sqrt{3}$ d) $\sqrt{3}$

b) $2\sqrt{3}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

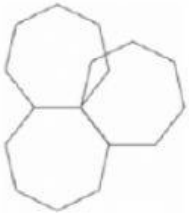
LIVEWORKSHEETS

13. (Enem/MEC) Na construção civil, é muito comum a utilização de ladrilhos ou azulejos com a forma de polígonos para o revestimento de pisos ou paredes. Entretanto, não são todas as combinações de polígonos que se prestam a pavimentar uma superfície plana, sem que haja falhas ou superposições de ladrilhos, como ilustram as figuras:



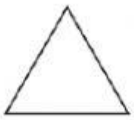
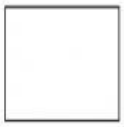
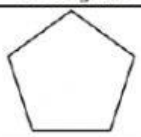
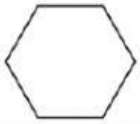
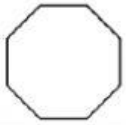
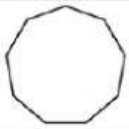
IMAGENS: ENEM

■ Figura 1: Ladrilhos retangulares pavimentando o plano



■ Figura 2: Heptágonos regulares não pavimentam o plano (há falhas ou superposição)

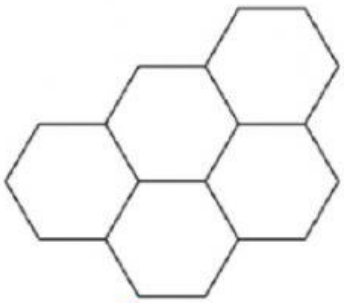
A tabela traz uma relação de alguns polígonos regulares, com as respectivas medidas de seus ângulos internos.

Nome	Triângulo	Quadrado	Pentágono	Hexágono	Octógono	Eneágono
Figura						
Ângulo interno	60°	90°	108°	120°	135°	140°

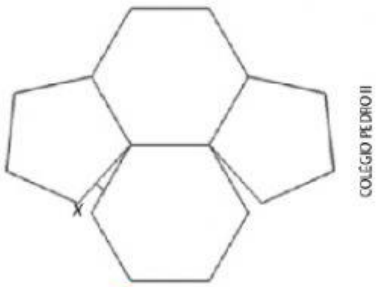
Se um arquiteto deseja utilizar uma combinação de dois tipos diferentes de ladrilhos entre os polígonos da tabela, sendo um deles octogonal, o outro tipo escolhido deverá ter a forma de um

a) triângulo.
b) quadrado.
c) pentágono.
d) hexágono.
e) eneágono.

14. (CP2) Alguns polígonos regulares, quando postos juntos, preenchem o plano, isto é, não deixam folga, espaço entre si. Por outro lado, outras combinações de polígonos não preenchem o plano. A seguir, exemplos desse fato: a Figura 1, formada por hexágonos regulares, preenche o plano; a Figura 2, formada por pentágonos e hexágonos regulares, não preenche o plano.



■ Figura 1



COLÉGIO PEDRO II

■ Figura 2

Na Figura 2, a medida x do ângulo é igual a

a) 14°.
b) 12°.
c) 10°.
d) 8°.

LIVEWORKSHEETS