• Função afim

Você vai estudar outras situações nas quais é possível verificar relações entre grandezas e entre conjuntos, em especial, aquelas que podem ser associadas ao conceito de função e de função afim.

Chamamos de **grandeza** o que pode ser expresso por uma medida, por exemplo: comprimento, área, volume, temperatura.

➢ A ideia de função

Os valores que as grandezas podem assumir nessas relações são representados genericamente por **variáveis**, que podem ser classificadas como **variável dependente** e **variável independente**.

Nas situações anteriores, temos:

As situações apresentadas têm duas características em comum:

• **Todos os valores** que podem ser assumidos pela variável independente são associados a valores da variável dependente.

• Cada valor atribuído à variável independente está associado a **um único valor** da variável dependente. Uma relação que possui essas duas características é chamada de **função**. Assim, podemos dizer que:

• o valor pago por uma corrida de táxi é função da distância percorrida pelo táxi naquela corrida;

• o valor a ser pago em um restaurante "por quilo" é função da quantidade, em quilograma, de comida consumida;

• o valor de uma fatura de energia elétrica é função da quantidade de energia elétrica consumida.

Variável independente	Variável dependente
Distância percorrida pelo táxi	Valor pago pela corrida
Quantidade de comida consumida	Valor pago pela refeição
Quantidade de energia elétrica consumida	Valor da fatura de energia elétrica

Acompanhe outras situações que podem ser representadas por funções.

Situação 1

Observe, na tabela a seguir, as tarifas vigentes em 31 de janeiro de 2020 para os serviços de envio de carta não comercial e cartão-postal, praticadas pelos Correios.

Carta não comercial e cartão-postal (vigência 31/1/2020)

Peso (g)	Preço básico (R$)
Até 20	2,05
Mais de 20 até 50	2,85
Mais de 50 até 100	3,95
Mais de 100 até 150	4,80
Mais de 150 até 200	5,65
Mais de 200 até 250	6,55
Mais de 250 até 300	7,50
Mais de 300 até 350	8,35
Mais de 350 até 400	9,25
Mais de 400 até 450	10,10
Mais de 450 até 500	11,00

Para determinar, com o uso da tabela, a relação entre "peso" e preço, escolhemos uma faixa de valores na coluna **Peso (g)** e lemos, na linha horizontal da tabela, o valor correspondente na coluna **Preço básico (R$)**. Por exemplo, se temos uma carta não comercial de 25 g, consideramos na coluna **Peso (g)** a célula "Mais de 20 até 50" e verificamos na coluna **Preço básico (R$)** o valor correspondente, ou seja, R$ 2,85.

Nessa situação, o preço básico da carta não comercial depende do "peso" da carta e, com base nessa tabela, podemos obter outras informações a respeito da relação entre "peso" da carta não comercial e preço básico para envio.

Observe que cada "peso" de carta não comercial a ser enviada corresponde a um único preço básico. Assim, dizemos que o preço básico para enviar uma carta não comercial é uma **função** do "peso" da carta. O "peso" da carta é a **variável independente**, e o preço básico é a **variável dependente**.

Situação 2

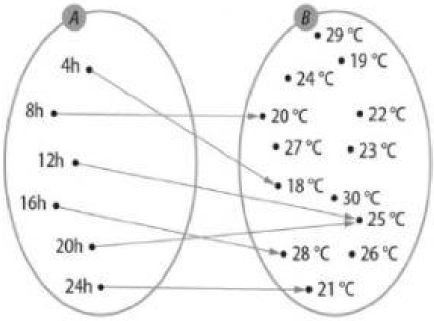
Durante um dia, um centro de meteorologia realizou medições de temperatura, de quatro em quatro horas, no centro de sua cidade. A menor temperatura registrada foi 18 °C, e a maior, 28 °C.
Observe a seguir as temperaturas obtidas, de acordo com o horário da medição.

Horário	4 h	8 h	12 h	16 h	20 h	24 h
Temperatura	18 °C	20 °C	25 °C	28 °C	25 °C	21 °C

Podemos também representar essas informações por meio de um esquema, conhecido como **diagrama de flechas**. Consideramos como elementos de um conjunto A os horários nos quais foram realizadas as medições, e como elementos de um conjunto B alguns dos possíveis valores de temperatura verificados nesse dia, como indicado na imagem a seguir.

Como cada um dos elementos do conjunto A está relacionado a um único elemento do conjunto B, podemos dizer que essa relação é uma **função**.

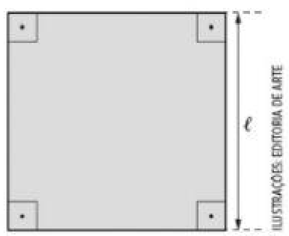
No diagrama podemos observar que em dois horários distintos a temperatura obtida pela medição foi 25 °C. Além disso, em nenhum dos horários em que foi realizada uma medição a temperatura registrada foi 19 °C, 22 °C, 23 °C, 24 °C, 26 °C, 27 °C, 29 °C ou 30 °C.



Situação 3

Para determinar a área A de um quadrado, multiplicamos a medida de seu lado ℓ por ela mesma, ou seja, elevamos ℓ ao quadrado. Podemos representar esse cálculo por meio da fórmula $A = \ell^2$.

Considerando A e ℓ números reais positivos, essa fórmula estabelece uma correspondência entre esses valores, de modo que a área de um quadrado é uma função da medida de seu lado. Por exemplo, se ℓ for igual a 5 cm, a área A será 25 cm².



Observe algumas medidas do lado de um quadrado e da área correspondente.

ℓ (u.c.) [unidade de comprimento]	1	2	3	10	50	100
A (u.a.) [unidade de área]	1	4	9	100	2 500	10 000

Como a área do quadrado depende da medida de seu lado, a variável independente é a medida do lado, e a variável dependente é a área.

A fórmula da área de um quadrado pode ser interpretada como a **lei de formação** ou a **lei de correspondência** da função que relaciona a área A de um quadrado e a medida do lado ℓ correspondente.

Uma possível maneira de compreender a lei de formação de uma função é pensar em uma máquina que transforma a matéria-prima (variável independente) em produto final (variável dependente). Observe a seguir um esquema que mostra como uma máquina "transforma" a medida do lado (ℓ) de um quadrado em sua respectiva área (A).

➢ Definição de função

Dados dois conjuntos não vazios, A e B, uma **função** de A em B é uma relação que associa **cada** elemento x de A a um **único** elemento y de B.

Para indicar uma função de A em B, podemos usar a seguinte notação:

$f: A \longrightarrow B$ (lê-se: f de A em B)

A função f transforma x de A em y de B, o que pode ser escrito como $y = f(x)$ (lê-se: y é igual a f de x).

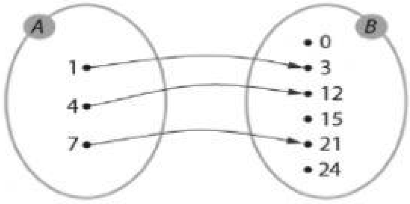
Vamos agora utilizar diagramas para analisar algumas relações entre conjuntos de números e, com base nessa análise, concluir se são ou não uma função.
Acompanhe os exemplos a seguir.

a) Dados os conjuntos $A = \{1, 4, 7\}$ e $B = \{0, 3, 12, 15, 21, 24\}$, seja a relação de A em B expressa por $y = 3x$, com $x \in A$ e $y \in B$.

Observe que:

- todos os elementos de A estão associados a elementos de B;
- cada elemento de A está associado a um único elemento de B.

Nesse caso, a relação de A em B expressa por $y = 3x$ é uma **função de A em B** e corresponde à função "multiplicar por 3".

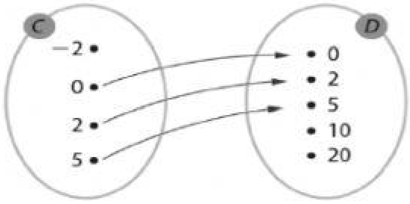


b) Dados os conjuntos $C = \{-2, 0, 2, 5\}$ e $D = \{0, 2, 5, 10, 20\}$, seja a relação de C em D expressa por $y = x$, com $x \in C$ e $y \in D$.

Observe que:

- existe um elemento de C (o número -2) que não está associado a nenhum elemento de D.

Portanto, a relação de C em D expressa por $y = x$ **não é uma função de C em D**.

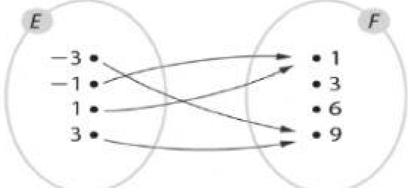


c) Dados os conjuntos $E = \{-3, -1, 1, 3\}$ e $F = \{1, 3, 6, 9\}$, seja a relação de E em F expressa por $y = x^2$, com $x \in E$ e $y \in F$.

Observe que:

- todos os elementos de E estão associados a elementos de F;
- cada elemento de E está associado a um único elemento de F.

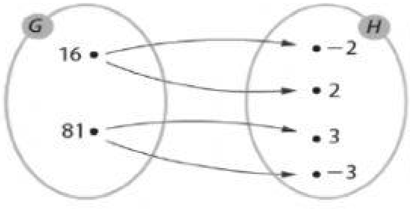
A relação de E em F expressa por $y = x^2$ representa uma **função de E em F** e corresponde à função "elevar ao quadrado".



d) Dados os conjuntos $G = \{16, 81\}$ e $H = \{-3, -2, 2, 3\}$, seja a relação de G em H expressa por $y = \pm\sqrt[4]{x}$, com $x \in G$ e $y \in H$.

Observe que:

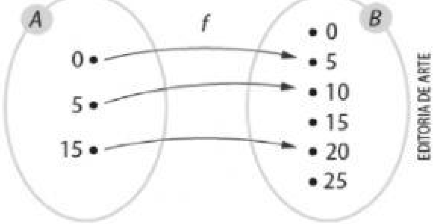
- todos os elementos de G estão associados a elementos de H;
- os elementos de G (tanto o número 16 quanto o 81) estão associados a mais de um elemento de H.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Nesse caso, a relação de G em H **não representa uma função de G em H**, pois existe pelo menos um elemento de G que está associado a mais de um elemento de H.

➢ Domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função



Observe o diagrama que representa a função $f : A \to B$, definida por $y = x + 5$.

O conjunto A chama-se **domínio** da função. Esse conjunto é constituído de todos os elementos x (variável independente) de A e é indicado por **D(*f*)**.

O conjunto B é chamado de **contradomínio** da função. Esse conjunto é constituído de todos os elementos y (variável dependente) de B e é indicado por **CD(*f*)**.

Assim, de acordo com o diagrama, temos:

- $D(f) = A = \{0, 5, 15\}$
- $CD(f) = B = \{0, 5, 10, 15, 20, 25\}$

Cada elemento x do domínio tem um correspondente y no contradomínio. A esse valor de y, associado a x pela função f, damos o nome de **imagem** de x pela função f e indicamos por $\boldsymbol{y = f(x)}$.

Essa notação é muito comum e simplifica a linguagem, pois, em vez de dizermos "Qual é o valor de y quando x é igual a 15?", podemos dizer simplesmente "Qual é o valor de $f(15)$?".

Nesse caso, para obtermos o valor de y quando x é igual a 15, considerando a lei da função f, dada por $y = x + 5$, determinamos $f(15)$:

$$f(15) = 15 + 5 \Rightarrow f(15) = 20 \text{ ou } y = 20$$

O conjunto de todos os valores de y pertencentes a $CD(f)$, que são imagens de x pela função, é chamado de **conjunto imagem** da função. O conjunto imagem, indicado por **Im(*f*)**, é um subconjunto do contradomínio.

No exemplo anterior, temos: $Im(f) = \{5, 10, 20\}$

Uma função é precisamente definida quando explicitamos o domínio, o contradomínio e a relação que associa cada elemento do domínio a um único elemento do contradomínio.

➢ Estudo do domínio de uma função real

Uma função em que o domínio e o contradomínio são subconjuntos de $\mathbb{R}$ é chamada de **função real de variável real**.

Observe alguns exemplos:

a) A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 3x^2 - 1$, tem como domínio $D(f) = \mathbb{R}$ e $CD(f) = \mathbb{R}$.

b) A função $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = -\dfrac{x}{2} + 5$, possui domínio $D(g) = \mathbb{Z}$ e $CD(g) = \mathbb{R}$.

c) A função $h: [-2, 5[\to \mathbb{R}_+$, dada por $h(x) = 2^{x+3}$, possui domínio $D(h) = [-2, 5[$ e $CD(h) = \mathbb{R}_+$.

Quando não há menção explícita ao domínio e ao contradomínio de uma função real de variável real, subentende-se que $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$ e $CD(f) = \mathbb{R}$. Veja outros exemplos:

d) Na função f definida por $f(x) = x^3 - 2x^2 + 7$, x pode ser qualquer número real, ou seja: $D(f) = \mathbb{R}$ e $CD(f) = \mathbb{R}$.

e) A função f cuja lei é $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$ não está definida quando $x = 3$, pois o denominador dessa expressão se anula. Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$ e $CD(f) = \mathbb{R}$.

f) Na função g definida por $g(x) = \sqrt{x+5}$, devemos desconsiderar qualquer valor de x que transforme o radicando em um número negativo, pois a raiz quadrada de um número negativo não está definida no conjunto dos números reais. Nesse caso, é preciso que $x + 5 \geqslant 0$ ou $x \geqslant -5$. Portanto, $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -5\}$ e $CD(g) = \mathbb{R}$.

Assim, para explicitar ou identificar o domínio de uma função real de variável real apresentada apenas pela lei de formação, consideramos o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ em que essa função pode ser definida.

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

1. Em uma festa, os salgados são vendidos com desconto se comprados em maior quantidade, como indicado na tabela de preços a seguir.

> Preço dos salgados

Quantidade de salgados	Preço (R$)
1	4,00
2	7,00
3	10,00
4	12,00
5 ou mais	2,50 cada salgado

Fonte: Dados fictícios.

Com base nesses dados, responda:

a) O que essa tabela representa?

b) O preço é uma função da quantidade de salgados?

c) Qual é a variável independente nessa situação? E a variável dependente?

d) Qual é o valor a ser pago por 3 salgados? E por 6 salgados?

Resolução

a) Essa tabela representa a variação do preço dos salgados, de acordo com a quantidade comprada.

b) Sim. O preço a ser pago é uma função da quantidade de salgados, pois cada quantidade corresponde a um único preço.

c) A variável independente é a quantidade de salgados comprados. A variável dependente é o preço a ser pago.

d) O valor a ser pago por 3 salgados é R$ 10,00. Por 6 salgados, o valor a ser pago é R$ 15,00, pois $6 \cdot 2{,}50 = 15{,}00$.

2. Marina é vendedora de uma loja de roupas, e seu salário mensal bruto é composto de uma parte fixa de R$ 1.500,00 mais uma comissão de 5% do valor total das vendas realizadas no mês.

a) Escreva a lei de formação que expressa o salário bruto de Marina.

b) Qual será o salário bruto de Marina se ela vender R$ 5.000,00 em mercadorias no mês?

c) Sabendo que no mês passado o salário bruto de Marina foi de R$ 2.750,00, qual foi o valor total das vendas por ela realizada?

Resolução

a) Considerando S o salário mensal bruto de Marina, x o valor total de vendas efetuadas no mês, e a parte fixa de R$ 1.500,00, temos:

$$S = 1500 + \frac{5}{100}x \Rightarrow S = 1500 + 0{,}05x$$

b) Fazendo $x = 5000$, temos:

$S = 1500 + 0{,}05x$

$S = 1500 + 0{,}05 \cdot 5000 = 1750$

Portanto, se Marina vender R$ 5.000,00, seu salário bruto no mês será R$ 1.750,00.

c) Sendo $S = 2750$, temos:

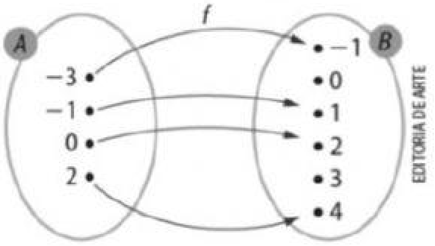
$2750 = 1500 + 0{,}05x \Rightarrow$

$\Rightarrow 2750 - 1500 = 0{,}05x \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{1250}{0{,}05} = 25000$

Portanto, se Marina obteve um salário bruto de R$ 2.750,00, ela vendeu R$ 25.000,00 em mercadorias nesse mês.

Dada a função f: $A \to B$ definida por $f(x) = x + 2$ e representada no diagrama a seguir, identifique o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem de f.



Resolução

Observando o diagrama, temos:

$D(f) = A = \{-3, -1, 0, 2\}$

$CD(f) = B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

$Im(f) = \{-1, 1, 2, 4\}$

Um tanque com capacidade de 20 litros está completamente cheio de água. Em determinado momento, abre-se uma torneira que o esvazia, segundo uma vazão de 2 litros por minuto.

a) Escreva a lei de formação da função que representa o volume de água V, em litro, que resta no tanque em relação ao tempo t, em minuto, até que o tanque fique vazio.

b) Em quanto tempo o tanque ficará vazio?

c) Quais valores t pode assumir nessa função? Qual é o domínio da função V?

d) O valor $V = 30$ faz parte do conjunto imagem dessa função? Justifique sua resposta.

Resolução

a) Na situação apresentada, o intervalo de tempo t é a variável independente e o volume de água V que resta no tanque é a variável dependente.

Atribuindo alguns valores a t, podemos construir uma tabela:

t (min)	V (L)
0	20
1	$20 - 1 \cdot 2 = 18$
2	$20 - 2 \cdot 2 = 16$
3	$20 - 3 \cdot 2 = 14$
⋮	⋮
t	$20 - t \cdot 2 = 20 - 2t$

Com base nessa tabela, temos: $V(t) = 20 - 2t$.

b) O tanque fica vazio quando $V(t) = 0$. Assim, temos:

$V(t) = 20 - 2t \Rightarrow 0 = 20 - 2t \Rightarrow$

$\Rightarrow 2t = 20 \Rightarrow t = 10$

Logo, o tanque ficará vazio após 10 minutos.

c) Como a função está definida apenas até o tanque ficar vazio, o tempo t pode assumir valores no intervalo de tempo $0 \leqslant t \leqslant 10$.

Portanto, o domínio da função é: $D(V) = \{t \in \mathbb{R}_+ \mid 0 \leqslant t \leqslant 10\}$ ou $D(V) = [0, 10]$.

d) Para saber se o valor $V = 30$ faz parte do conjunto imagem, vamos substituí-lo na lei da função e observar o valor de t obtido.

$V(t) = 20 - 2t \Rightarrow 20 - 2t = 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2t = 10 \Rightarrow t = -5$

Como $t = -5$ não pertence ao domínio da função, concluímos que $V = 30$ não pertence ao conjunto imagem da função.

5. Determine o domínio das funções dadas por:

a) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 - 9}$ b) $y = \sqrt{1 - 6x}$

Resolução

a) A função dada por $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 - 9}$ só está definida se $x^2 - 9 \neq 0$.

Resolvendo a desigualdade, temos:

$x^2 - 9 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 9 \Rightarrow x \neq 3$ e $x \neq -3$

Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3 \text{ e } x \neq -3\}$ ou $D(f) = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$.

b) A função dada por $y = \sqrt{1 - 6x}$ só está definida se $1 - 6x \geqslant 0$.

Resolvendo a inequação, temos:

$1 - 6x \geqslant 0 \Rightarrow -6x \geqslant -1 \Rightarrow 6x \leqslant 1 \Rightarrow x \leqslant \dfrac{1}{6}$

Portanto, $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \dfrac{1}{6}\right\}$.

EXERCÍCIOS

1. Nos itens a seguir, estão descritas algumas relações entre variáveis. Em cada caso, identifique a variável independente e a variável dependente.

a) O número de barras de chocolate que alguém compra e a quantia paga por elas.

b) O andar do apartamento em que uma pessoa mora e o tempo necessário para o elevador, a partir do térreo e sem nenhuma parada, chegar até o apartamento.

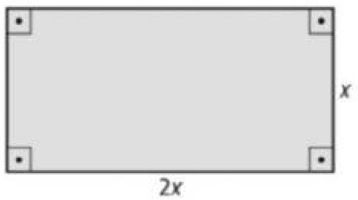
2. (Saresp-SP) As variáveis s e t estão relacionadas de acordo com a tabela abaixo:

t	1	2	3	4	5
s	0	3	8	15	24

A relação algébrica entre s e t é:

a) $s = 2t - 2$
b) $s = t - 1$
c) $s = t^2 - 1$
d) $s = t^2$

3. O retângulo representado na figura tem lados que medem x e $2x$.



Expresse o perímetro P, a área A e a medida d da diagonal desse retângulo em função de x.

4. Arthur elaborou uma fórmula em uma planilha de cálculo e usou a lei geral $y = ax + b$, em que a e b são números inteiros. Em seguida, anotou alguns dos valores obtidos como indicado a seguir.

x (nº de entrada)	y (nº de saída)
0	3
1	5
2	7
3	9
4	11
5	13

Com base nessas informações, determine os valores de a e b e escreva a fórmula utilizada por Arthur.

5. (UFG-GO) Um padeiro fabrica 300 pães por hora. Considerando esse dado, pede-se:

a) a lei que representa o número de pães fabricados (p) em função do tempo (t);

b) quantos pães são fabricados em 3 horas e 30 minutos?

6. Dado o conjunto $A = \{-2, -1, 0, 1\}$, determine o conjunto imagem da função $f: A \to \mathbb{R}$ quando f for definida por:

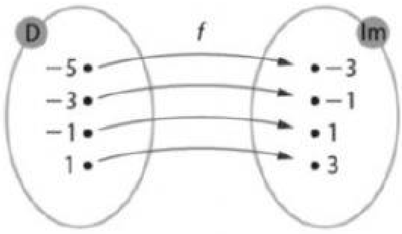
a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = -x + 3$

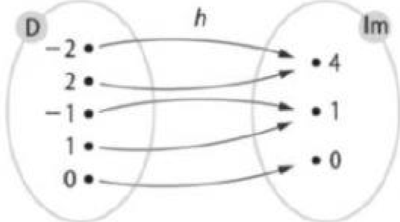
c) $f(x) = 1 - x^2$

7. Os diagramas de flechas a seguir indicam o domínio e o conjunto imagem de uma função. Em cada caso, escreva uma possível lei de formação da função.

a) função f



b) função h



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

8. O gerente de uma loja de eletrônicos verificou que, quanto mais ele anuncia em redes sociais, mais itens a loja vende. Essa relação pode ser expressa por uma função dada pela lei $y = \frac{3}{2}x + 80$, em que y representa o número de itens vendidos durante a semana e x, o número de anúncios publicados durante o mesmo período.

Nessas condições, quantas vezes o gerente deverá anunciar nesta semana para que a loja venda 200 itens?

9. (Epcar-MG) Um pintor foi contratado para pintar a fachada do prédio do Comando da Epcar, em decorrência das comemorações do seu sexagésimo aniversário. Esse pintor cobra um valor fixo de 30 reais e mais uma quantia que depende da área pintada. A tabela seguinte indica o orçamento apresentado pelo pintor.

Área x pintada (em m^2)	Total y a pagar pela pintura (em reais) incluindo a parcela fixa
5	40
10	50
15	60
20	70
30	90
40	110

Com base nos dados acima, classifique em (**V**) verdadeiro ou (**F**) falso cada item a seguir.

( ) O pintor cobra 30 reais mais 3 reais pelo metro quadrado pintado.

( ) Se foram pagos pela pintura 530 reais, então a área pintada foi de 250 m^2.

( ) Pela pintura de uma área correspondente a 150 m^2 seria cobrado menos de 300 reais.

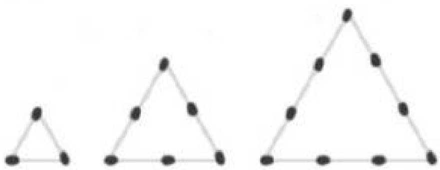
Tem-se a sequência correta em:

a) V – F – F
b) V – F – V
c) F – V – F
d) F – F – V

10. Determine o domínio das funções definidas por:

a) $h(x) = 4x - 5$
b) $j(x) = \dfrac{3}{x^2 - 1}$
c) $z(x) = \sqrt{1 - 2x}$

11. Observe a sequência de triângulos cujos lados são formados por palitos de fósforo.



EDITORIA DE ARTE

a) Reproduza a tabela em seu caderno e complete-a com os valores que faltam.

Número de palitos em cada lado	1	2	3	4	5	6
Total de palitos em cada triângulo	3	6				

b) Considere x o número de palitos em cada lado e y o total de palitos em cada triângulo para escrever uma sentença matemática que expressa y em função de x.

c) Qual é o domínio dessa função? E a imagem?

d) Quantos palitos deve ter cada lado para se construir um triângulo com 45 palitos?

12. Com base na ideia da atividade anterior, elabore um problema considerando uma sequência formada por quadrados construídos com palitos de fósforo. Troque o problema com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro.

13. A relação entre uma medida de temperatura expressa em grau Celsius (°C) e em grau Fahrenheit (°F) é dada pela fórmula $C = \frac{5}{9} \cdot (F - 32)$, em que C representa o valor em grau Celsius e F, o valor em grau Fahrenheit. Sabe-se que em um período de 10 anos a média de temperatura no mês de dezembro, em Londres, variou de −2 °C a 10 °C. A partir dessas informações, responda: o valor de 56 °F pertence a esse intervalo?

DRG PHOTOGRAPHY/SHUTTERSTOCK.COM

Termômetro de rua marcando 32 °C (Londres, Reino Unido). Fotografia de 2019.