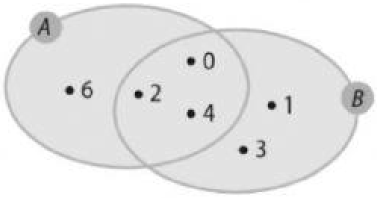
• Operações entre conjuntos

➢ União de conjuntos

A **união** (também chamada de **reunião**) **de dois conjuntos** *A* e *B*, que indicamos por $A \cup B$, é o conjunto formado pela junção dos elementos que pertencem ao conjunto *A* com os elementos que pertencem ao conjunto *B*:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$



A parte pintada dos conjuntos indica $A \cup B$.

Por exemplo, dados os conjuntos $A = \{0, 2, 4, 6\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, a união desses conjuntos é o conjunto cujos elementos pertencem a pelo menos um desses conjuntos, isto é:

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$$

Lê-se: *A união B* ou *A reunião B*.

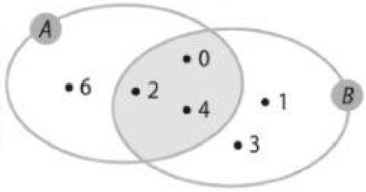
Observe que, qualquer que seja o elemento de $A \cup B$, ele pertence ao conjunto *A* ou ao conjunto *B* ou a ambos.

➢ Intersecção de conjuntos

A **intersecção de dois conjuntos** *A* e *B*, que indicamos por $A \cap B$, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a *A* e também pertencem a *B*:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE



A parte pintada dos conjuntos indica $A \cap B$.

Por exemplo, a intersecção dos conjuntos *A* e *B* do exemplo anterior é o conjunto cujos elementos pertencem, ao mesmo tempo, ao conjunto *A* e ao conjunto *B*. Veja:

$$A \cap B = \{0, 2, 4\}$$

Lê-se: *A intersecção B*.

Observação:

Se os conjuntos *A* e *B* não possuem elementos comuns ($A \cap B = \varnothing$), dizemos que *A* e *B* são conjuntos **disjuntos**. Acompanhe alguns exemplos:

a) Dados os conjuntos: $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

Temos $A \cap B = \varnothing$, então os conjuntos *A* e *B* são disjuntos.

b) Dados os conjuntos: $P = \{p \mid p \text{ é mês do ano com 30 dias}\}$ e $Q = \{\text{dezembro}\}$

O mês de dezembro tem 31 dias, então os conjuntos *P* e *Q* são disjuntos, pois $P \cap Q = \varnothing$.

➢ Propriedades da união e da intersecção de conjuntos

Dados três conjuntos, A, B e C, é possível demonstrar que valem as seguintes propriedades:

1ª) Propriedade comutativa

$A \cup B = B \cup A$ ⟵ propriedade comutativa da união

$A \cap B = B \cap A$ ⟵ propriedade comutativa da intersecção

2ª) Propriedade associativa

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ⟵ propriedade associativa da união

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ⟵ propriedade associativa da intersecção

3ª) Propriedade distributiva

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ⟵ propriedade distributiva da intersecção em relação à união

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ⟵ propriedade distributiva da união em relação à intersecção

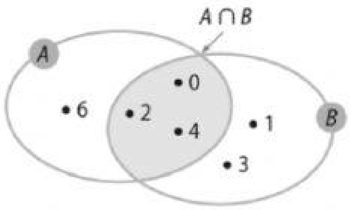
4ª) Propriedade

Se $A \subset B$, então $A \cup B = B$ e $A \cap B = A$.

Da mesma maneira, se $A \cup B = B$ ou $A \cap B = A$, então $A \subset B$.

➢ Quantidade de elementos da união de conjuntos

Acompanhe o exemplo a seguir. Dados os conjuntos $A = \{0, 2, 4, 6\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, qual é a quantidade de elementos do conjunto $A \cup B$? Note que, se adicionarmos a quantidade de elementos de A à quantidade de elementos de B, a quantidade de elementos de $A \cap B$ é contada duas vezes, pois os elementos 0, 2 e 4 estão presentes nos dois conjuntos. Assim, precisamos descontar essa repetição e concluímos que o conjunto $A \cup B$ tem 6 elementos.



De maneira geral, sendo A e B dois conjuntos finitos, a quantidade de elementos do conjunto $A \cup B$, que indicamos por $n(A \cup B)$, é dada pela seguinte relação:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Aplicando essa igualdade para o exemplo anterior, temos:

$$n(A \cup B) = 4 + 5 - 3 \Rightarrow n(A \cup B) = 6$$

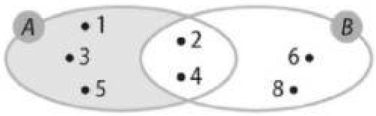
Observação:
Se $A \cap B = \varnothing$, temos: $n(A \cap B) = 0$ e $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

➢ Diferença de conjuntos

A **diferença** de dois conjuntos A e B, que indicamos por $A - B$, nessa ordem, é o conjunto dos elementos que pertencem a A e não pertencem a B:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Por exemplo, dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8\}$, a diferença $A - B$ é formada por todos os elementos que pertencem a A, mas não pertencem a B.



A parte pintada nos conjuntos indica $A - B$.

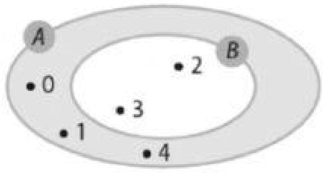
$$\underbrace{A - B}_{\text{Lê-se: } A \text{ menos } B.} = \{1, 3, 5\}$$

Se $B \subset A$, a diferença $A - B$ é denominada **complementar** de B em relação a A e é indicada por:

$$\complement_A^B = A - B$$

Por exemplo, se $B = \{2, 3\}$ e $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, o complementar de B em relação a A é o que falta para o conjunto B ficar igual ao conjunto A, ou seja:

$$\complement_A^B = A - B = \{0, 1, 4\}$$



A parte pintada nos conjuntos indica $\complement_A^B$.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

No caso de termos determinado conjunto universo U, do qual A é subconjunto, o complementar de A em relação a U é indicado por:

$$A' = \overline{A} = A^C = \complement_U^A = U - A$$

Exercícios

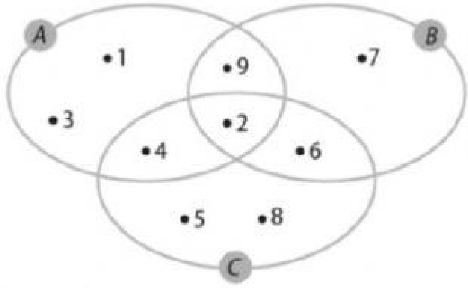
1. Sendo $A = \{0, 11, 12, 13, 14\}$, $B = \{11, 12\}$, $C = \{x \mid x$ é número natural par compreendido entre 11 e 19$\}$, $D = \{x \mid x$ é número natural ímpar compreendido entre 10 e 16$\}$, determine:

a) $A \cap B$
b) $A \cap C$
c) $B \cup C$
d) $C \cup D$
e) $(A \cup B) \cup C$
f) $(A \cap C) \cap D$

2. Dados os conjuntos $A = \{m, n, p, q\}$, $B = \{n, p, q\}$ e $C = \{p, q, r, s\}$, cujos elementos são letras, determine:

a) $A - B$
b) $A - C$
c) $B - C$
d) $(A \cap B) - C$
e) $(A - C) \cap (B - C)$
f) $A - \varnothing$

3. Considere o diagrama a seguir.



EDITORIA DE ARTE

Determine:

a) $A \cup B$
b) $A \cup C$
c) $A \cup B \cup C$
d) $B \cap C$
e) $A \cap B \cap C$
f) $A - C$
g) $(A \cap C) - B$

4. Liste os elementos dos conjuntos resultantes de cada operação a seguir.

a) $\{10, 11, 12\} \cap \{7, 8, 9, 10, 11\}$
b) $\{-3, -2, -1, 0\} \cap \{0, 1, 2, 3\}$
c) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right\} \cap \left\{\frac{1}{5}, \frac{1}{6}\right\}$

5. Os conjuntos A, B e E são tais que
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A \cap B = \{4, 5\}$,
$E - B = \{1, 2\}$, $B - A = \{6, 7\}$, $E \cap B = \varnothing$
e $E \subset A$. Calcule $\complement_A^E$.

6. Dados $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{0, 2, 5\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$ e $E = \{2, 4, 6\}$, determine:

a) $\complement_U^A$
b) $\complement_U^B$
c) $\complement_U^E$

7. Representamos $M(a)$ o conjunto dos múltiplos de a, e $D(a)$, o conjunto dos divisores de a, com a sendo um número natural. Liste os elementos dos conjuntos resultantes das operações a seguir.

a) $M(3) \cap D(30)$
b) $M(2) \cap M(4)$
c) $D(100) \cap D(50)$
d) $M(7) \cap M(5)$

8. (IFMT) Numa festa, 35 pessoas discutiam sobre dois filmes: A e B. Dessas pessoas, precisamente: 15 assistiram ao filme A, 8 assistiram aos dois filmes e 10 não assistiram a nenhum dos dois filmes. Então, sabendo que todas as 35 pessoas opinaram, o número de pessoas que assistiram ao filme B é igual a:

a) 7
b) 8
c) 10
d) 18
e) 25

9. Uma pesquisa revelou que, das pessoas consultadas, 100 liam o jornal A, 150 liam o jornal B, 20 liam os dois jornais (A e B) e 110 não liam nenhum jornal. Quantas pessoas foram consultadas?

10. Em uma escola de idiomas há 630 estudantes, dos quais 350 optaram pelo curso de Inglês, 210 escolheram o de Espanhol e 90 optaram pelos dois cursos (Inglês e Espanhol). Pergunta-se:

a) Quantos estudantes cursam apenas Inglês?
b) Quantos estudantes cursam apenas Espanhol?
c) Quantos estudantes cursam Inglês ou Espanhol?
d) Quantos estudantes não cursam nenhuma das duas disciplinas?

11. Em um grupo de 99 esportistas, 40 jogam vôlei, 20 jogam vôlei e xadrez, 22 jogam xadrez e tênis, 18 jogam vôlei e tênis, e 11 jogam as três modalidades. O número de pessoas que jogam xadrez é igual ao número de pessoas que jogam tênis. Quantos esportistas jogam:

a) tênis e não jogam vôlei?
b) xadrez ou tênis e não jogam vôlei?
c) vôlei e não jogam xadrez?