- **Conjuntos**

Conceitos iniciais

Um **conjunto** é uma coleção qualquer de objetos, cada um deles chamado de **elemento**.

Representações de um conjunto

Geralmente, nomeamos os conjuntos utilizando letras maiúsculas (por exemplo: A, B, C, D, ..., X, Y, Z) e adotamos letras minúsculas para representar seus elementos (por exemplo: a, b, c, d, ..., x, y, z).

Os elementos do conjunto são colocados entre chaves e separados por vírgula ou ponto e vírgula:

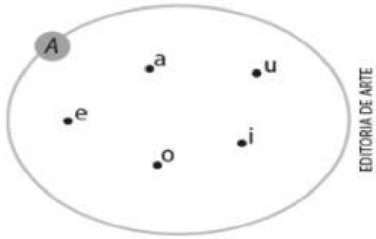
$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

Os elementos do conjunto são indicados por uma ou mais propriedades que os caracterizam:

$$A = \{x \mid x \text{ é vogal do nosso alfabeto}\}$$

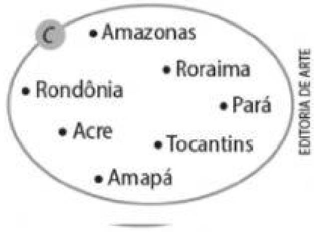
Esse símbolo significa **tal que**.

Os elementos do conjunto aparecem em um **diagrama de Venn**, como mostra esta imagem:



Veja outros exemplos de conjuntos:

- conjunto das consoantes da palavra avião: $A = \{v\}$;
- conjunto dos números naturais pares: $B = \{b \in \mathbb{N} \mid b \text{ é par}\}$;
- conjunto dos estados da região Norte:



Para indicar que um elemento faz parte de determinado conjunto, usamos o símbolo $\in$ (**pertence**), e para indicar que ele não faz parte, usamos o símbolo $\notin$ (**não pertence**). Por exemplo, dado o conjunto das vogais $A = \{a, e, i, o, u\}$, temos:

- $i \in A$ (lê-se: i pertence a A);
- $d \notin A$ (lê-se: d não pertence a A).

Tipos de conjuntos

Quanto ao número de elementos, os conjuntos podem ser classificados como finitos ou infinitos.

Um conjunto é **finito** quando é possível contar seus elementos.

Exemplo do conjunto A das vogais de nosso alfabeto:

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

Um conjunto é **infinito** quando não é finito, ou seja, quando não é possível contar todos os seus elementos e finalizar a contagem até certo número. Por exemplo, dado o conjunto B dos números naturais ímpares:

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9, ...\}$$

Um conjunto é **unitário** quando é formado por um único elemento. Por exemplo:

$$H = \{x \mid x \text{ é um número natural maior do que 6 e menor do que 8}\}$$

Como só existe um número natural maior do que 6 e menor do que 8, temos: $H = \{7\}$. Logo, H é um conjunto unitário.

O **conjunto vazio** é aquele que não possui elementos. Ele é representado por { } ou $\emptyset$. Por exemplo:

$$V = \{x \mid x \text{ é um número natural menor do que zero}\}$$

Como não existe número natural menor do que zero, o conjunto V é vazio. Logo, $V = \emptyset$. Por definição, o conjunto vazio é um conjunto finito.

Subconjuntos

Um conjunto *A* é **subconjunto** de um conjunto *B* quando qualquer elemento de *A* também pertence a *B*.

Em algumas situações ou contextos, todos os conjuntos considerados são subconjuntos de um mesmo conjunto, denominado **conjunto universo** e representado por *U*.

Quando um conjunto *A* é subconjunto de um conjunto *B*, temos uma **relação de inclusão** e dizemos que *A* **está contido** em *B* ou, ainda, que *A* é parte de *B*. Podemos dizer também que *B* **contém** *A*.

Indica-se:

$A \subset B$ (lê-se: *A* está contido em *B*) — Esse símbolo significa **está contido**.

$B \supset A$ (lê-se: *B* contém *A*) — Esse símbolo significa **contém**.

Veja alguns exemplos:

a) Sendo $A = \{1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3\}$, tem-se $A \subset B$.

b) $\{3, 4, 5\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

c) $\{4, 5, 6\} \subset \{4, 5, 6\}$

d) $\{2, 4, 6, 8\} \subset \{8\}$

e) $\{a, b\} \subset \{a, b, x, y\}$

f) Sendo $M = \{m \mid m$ é um mês do ano que tem 30 dias$\}$ e $Q = \{$junho, setembro$\}$, então $Q \subset M$.

Propriedades da relação de inclusão

É possível demonstrar que são válidas as seguintes propriedades para a relação de inclusão de conjuntos:

1ª) Propriedade reflexiva: $A \subset A$, para qualquer *A*, ou seja, um conjunto sempre é subconjunto dele mesmo.

2ª) Propriedade antissimétrica: Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$, ou seja, se um conjunto é subconjunto de outro, e vice-versa, então eles são iguais.

3ª) Propriedade transitiva: Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$, ou seja, se um conjunto é subconjunto de um segundo, que, por sua vez, é subconjunto de um terceiro conjunto, então o primeiro é subconjunto do terceiro.

Observações:

- A relação de pertinência ($x \in A$) é entre elemento e conjunto, enquanto a relação de inclusão ($A \subset B$) é entre dois conjuntos.
- Se existir pelo menos um elemento de *A* que não pertença a *B*, dizemos que *A* **não está contido** em *B* ou que *B* **não contém** *A*.
- O símbolo $\not\subset$ significa **não está contido**.
- O símbolo $\not\supset$ significa **não contém**.
- O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto, ou seja, $\varnothing \subset A$, qualquer que seja o conjunto *A*.

Igualdade de conjuntos

Dois conjuntos *A* e *B* são **iguais** se, e somente se, um deles for subconjunto do outro. Indicamos *A* = *B*. Em outras palavras, *A* = *B* se todo elemento de um conjunto pertence ao outro.

Dois conjuntos *A* e *B* são **diferentes** se, pelo menos, um dos elementos de um dos conjuntos não pertence ao outro. Indicamos $A \neq B$.

Exercícios:

1. Escreva os conjuntos descritos abaixo:

a) O conjunto *A* representado pelos números naturais múltiplos de 3 menores do que 20.

b) O conjunto *B* representado pelos números naturais primos menores do que 27.

c) O conjunto *C* representado pelos números naturais menores do que 50 e múltiplos de 7.

d) $D = \{x \mid x$ é satélite natural da Terra$\}$.

e) $E = \{y \mid y$ é consoante da palavra "pedra"$\}$

2. Dado o conjunto $B = \{1, -1, 2, -2\}$, responda se as proposições a seguir são verdadeiras ou falsas:

a) $1 \in B$

b) $\{1\} \in B$

c) $2 \in B$

d) $\{-1\} \notin B$

e) $1 \notin B$

f) $3 \in B$

- Agora reúna-se a um colega, e, para as afirmativas falsas, reescrevam-nas, alterando-as para que se tornem verdadeiras.

3. Observe o conjunto $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. Represente os subconjuntos de A formados:

a) pelos números maiores do que 5 e menores do que 10;

b) pelos números pares;

c) pelos números ímpares maiores do que ou iguais a 7.

4. Dado o conjunto $E = \{2, 4, 6, 8\}$, liste todos os subconjuntos de E formados por:

a) 3 elementos;

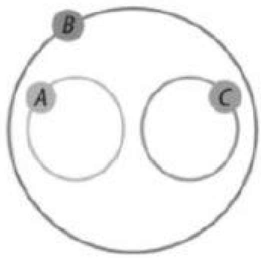
b) 4 elementos.

5. Sejam a e b números naturais, determine o valor de $a + b$, tal que $\{0, 1, 2\} = \{2, a, b\}$.

6. Uma pessoa tem quatro opções de música para escutar: a, b, c e d. Se ela quiser ouvir apenas duas músicas diferentes por dia, quais possibilidades de pares ela tem para escolher?

Pessoas que ouvem música alta têm risco de perda auditiva.

7. No diagrama a seguir, A, B e C são três conjuntos não vazios.



EDITORIA DE ARTE

Associe V ou F a cada uma das seguintes sentenças, conforme ela seja verdadeira ou falsa.

a) $A \subset B$

b) $C \subset B$

c) $B \subset A$

d) $A \subset C$

e) $B \not\subset A$

f) $A \not\subset C$

g) $B \supset A$

h) $A \not\supset B$

8. Dados os conjuntos $A = \{1\}$, $B = \{0, 1\}$, $C = \{1, 2, 3\}$ e $D = \{0, 1, 2, 4\}$, relacione cada par de conjuntos a seguir usando o símbolo $\subset$ ou $\not\subset$.

a) A e B

b) A e C

c) A e D

d) B e C

e) B e D

f) C e D

9. Sejam A, B e C os conjuntos a seguir:

$A = \{x \mid x$ é número natural par compreendido entre 3 e 15$\}$;

$B = \{x \mid x$ é número natural par menor do que 15$\}$;

$C = \{x \mid x$ é número natural par diferente de 2$\}$.

Relacione cada par a seguir usando o símbolo $\subset$ ou $\not\subset$.

a) A e B

b) A e C

c) B e C

10. Dado o conjunto $A = \{0, 2, 3\}$, diga se as proposições a seguir são verdadeiras ou falsas.

a) $0 \in A$

b) $1 \subset A$

c) $3 \in A$

d) $\{3\} \subset A$

e) $\{1, 2\} \subset A$

f) $\emptyset \subset A$

g) $\emptyset \in A$

h) $\{3\} \in A$

11. Indique apenas as afirmações verdadeiras.

a) $\{5\} \subset \{0, 5, 10, 15\}$

b) $\{a, b, c\} \supset \{b, a, c\}$

c) $2 \subset \{0, 2, 4\}$

d) $8 \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$

e) $\{1, 2, 3\} \supset \{1, 2\}$

f) $\{-1, 6\} \not\subset$ {números naturais}

g) $3 \in \{0, 3, 6, 9\}$

h) $\frac{1}{2} \notin$ {números naturais}

12. Sendo P e Q dois conjuntos não vazios, de modo que $P \subset Q$, indique apenas as afirmações verdadeiras.

a) Sempre existe x, $x \in P$, tal que $x \notin Q$.

b) Sempre existe x, $x \in Q$, tal que $x \notin P$.

c) Se $x \in Q$, então $x \in P$.

d) Se $x \notin Q$, então $x \notin P$.

e) P e Q não têm elementos em comum.

13. Quantos conjuntos M satisfazem à sentença a seguir?

$\{1, 2\} \subset M \subset \{1, 2, 3, 4\}$

14. Qual deve ser a relação entre os conjuntos A, B e C para que $A \subset B$, $B \subset C$ e $C \subset A$?