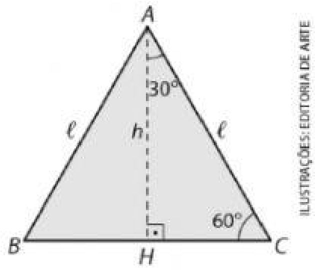
- ## Ângulos de 30°, de 45° e de 60°

Os ângulos de 30°, 45° e 60° podem ser destacados especialmente, porque as razões trigonométricas relacionadas a eles podem ser obtidas por meio de cálculos usando as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo equilátero e de um triângulo retângulo isósceles, como mostrado a seguir.

➢ **Seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30° e 60°**

Considere um triângulo equilátero *ABC*, no qual ℓ é a medida dos lados e *h* é a medida da altura relativa ao lado $\overline{BC}$, conforme mostra a figura.



No triângulo retângulo *AHC*, reto em *H*, aplicamos o teorema de Pitágoras para calcular a altura *h*:

$$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \sqrt{\ell^2 - \frac{\ell^2}{4}} = \sqrt{\frac{3\ell^2}{4}} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

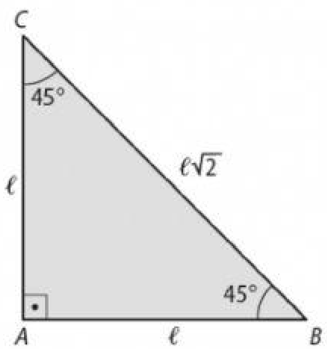
E obtemos as seguintes razões:

- $\text{sen } 30° = \dfrac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \dfrac{\ell}{2} \cdot \dfrac{1}{\ell} = \dfrac{1}{2}$
- $\cos 30° = \dfrac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{\ell} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\text{tg } 30° = \dfrac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\ell}{2} \cdot \dfrac{2}{\ell\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$
- $\text{sen } 60° = \dfrac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{\ell} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos 60° = \dfrac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \dfrac{\ell}{2} \cdot \dfrac{1}{\ell} = \dfrac{1}{2}$
- $\text{tg } 60° = \dfrac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\frac{\ell}{2}} = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{2}{\ell} = \sqrt{3}$

➢ **Seno, cosseno e tangente do ângulo de 45°**

Considere um triângulo retângulo e isósceles *ABC*, no qual ℓ é a medida dos catetos e $\ell\sqrt{2}$ é a medida da hipotenusa, conforme mostra a figura a seguir.

A partir desse triângulo *ABC*, obtemos as seguintes razões:



- $\text{sen } 45° = \dfrac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos 45° = \dfrac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\text{tg } 45° = \dfrac{\ell}{\ell} = 1$

Podemos organizar as razões trigonométricas dos ângulos de 30°, de 45° e de 60° em um quadro, como o apresentado ao lado. Elas serão bastante utilizadas nas resoluções das atividades, evitando a necessidade de fazer cálculos com valores aproximados.

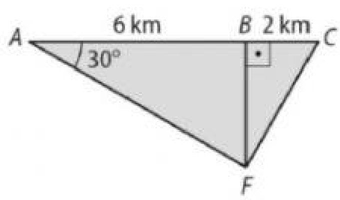
	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

1 (UFV-MG) Um navio, navegando em linha reta, passa sucessivamente pelos pontos A, B e C. O comandante, quando o navio está em A, observa um farol F e determina que o ângulo $F\hat{A}C$ mede 30°. Após navegar 6 km até o ponto B, ele verifica que o ângulo $F\hat{B}C$ mede 90°. Calcule a distância, em km, que separa o farol F do navio quando este se encontra no ponto C, situado a 2 km do ponto B.

Resolução

A figura representa a situação.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Do triângulo retângulo ABF, obtemos:

$$\text{tg } 30° = \frac{BF}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{BF}{6} \Rightarrow BF = 2\sqrt{3}$$

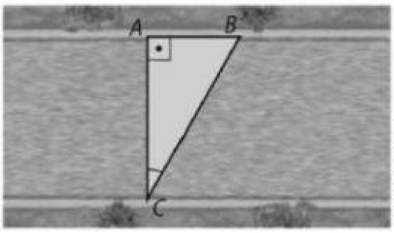
Logo, a distância BF é igual a $2\sqrt{3}$ km.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo BCF, temos:

$$(CF)^2 = (BF)^2 + (BC)^2 \Rightarrow (CF)^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2 \Rightarrow CF = \sqrt{16} \Rightarrow CF = 4, \text{ pois } CF > 0.$$

Portanto, a distância entre o farol e o navio no ponto C é de 4 km.

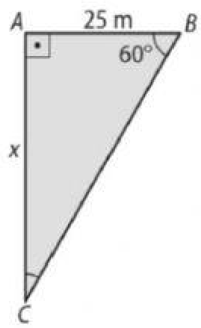
2 Suponha que um rio apresente um trecho de margens retas e paralelas, conforme mostra a figura.



SELMA CAPARROZ

Os pontos A e B pertencem a uma das margens e C pertence à outra. Sabendo que med($A\hat{B}C$) = 60°, med($B\hat{A}C$) = 90° e AB = 25 m, calcule a largura AC do rio.

Resolução

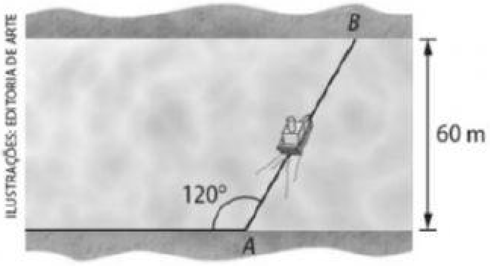


Do enunciado, temos:

$$\text{tg } 60° = \frac{x}{25} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{25} \Rightarrow x = 25\sqrt{3}$$

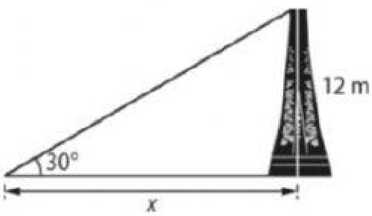
Portanto, a largura do rio é de $25\sqrt{3}$ m.

1. Um barco parte de *A* para atravessar um rio. A direção de seu deslocamento forma um ângulo de 120° com a margem do rio, conforme a figura. Sendo a largura do rio 60 m, qual é a distância *AB* percorrida pelo barco?



2. Uma escada, que mede 2,20 m de comprimento, acha-se apoiada em uma parede vertical e forma um ângulo de 60° com o plano horizontal. Se uma pessoa está no topo da escada, a que altura ela se encontra do chão? (Use $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$.)

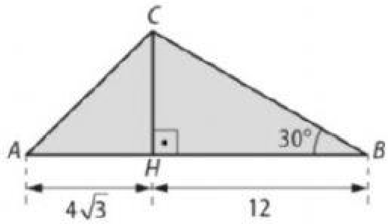
3. Uma torre vertical de 12 metros de altura é vista sob um ângulo de 30° por uma pessoa que se encontra a uma distância *x* do centro de sua base. O plano da base da torre está no nível dos olhos do observador. Determine a distância *x*. (Dado: tg 30° $\simeq$ 0,58.)



4. (UFG-GO) Para dar sustentação a um poste telefônico, utilizou-se um outro poste com 8 m de comprimento, fixado ao solo a 4 m de distância do poste telefônico, inclinado sob um ângulo de 60°, conforme a figura abaixo.

Considerando-se que foram utilizados 10 m de cabo para ligar os dois postes, determine a altura do poste telefônico em relação ao solo.

5. No triângulo *ABC* a seguir, $\overline{CH}$ é uma das alturas.

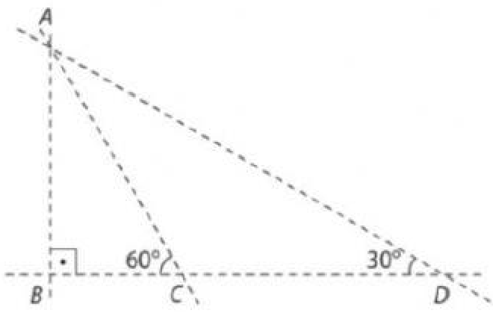


Determine:

a) a medida, em centímetro, de $\overline{CH}$. Use tg $30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

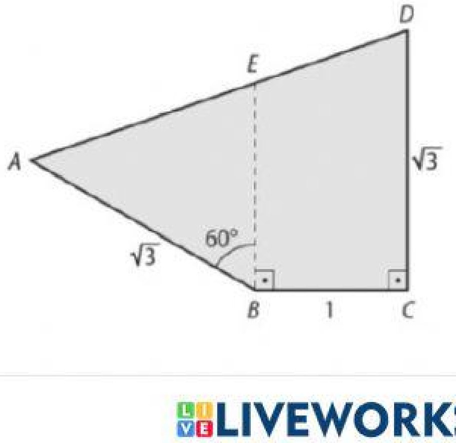
b) a medida, em grau, do ângulo $B\hat{A}C$.

6. (IFSC) A ilustração a seguir representa a planta das ruas de uma cidade. A rua representada pelo segmento $\overline{BC}$ tem 50 m de comprimento. Um dos engenheiros do projeto de pavimentação dessas ruas esqueceu de indicar algumas distâncias. Considerando que um de seus técnicos efetuou os cálculos, é CORRETO afirmar que o total de metros da rua que vai do ponto *A* até o ponto *D* é de:

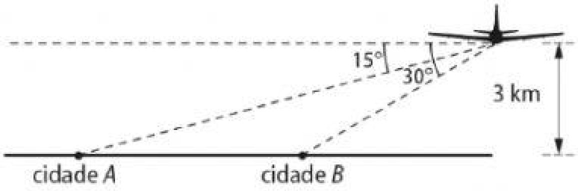


a) $50\sqrt{3}$ m.
b) $150\sqrt{3}$ m.
c) 50 m.
d) 100 m.
e) $100\sqrt{3}$ m.

7. (Fuvest-SP) No quadrilátero *ABCD* da figura abaixo, *E* é um ponto sobre o lado $\overline{AD}$ tal que o ângulo $A\hat{B}E$ mede 60° e os ângulos $E\hat{B}C$ e $B\hat{C}D$ são retos. Sabe-se ainda que $AB = CD = \sqrt{3}$ e $BC = 1$. Determine a medida de $\overline{AD}$.



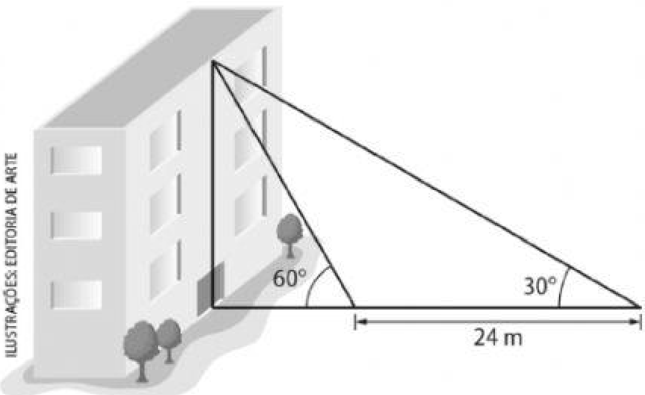
8. (UFV-MG) Um passageiro em um avião avista duas cidades, A e B, sob ângulos de 15° e 30°, respectivamente, conforme a figura a seguir:



Se o avião está a uma altitude de 3 km, a distância entre as cidades A e B é:

a) 7 km.
b) 5,5 km.
c) 5 km.
d) 6,5 km.
e) 6 km.

9. A partir de um ponto, observa-se o topo de um prédio sob um ângulo de 30°. Caminhando 24 m em direção ao prédio, atingimos outro ponto, de onde se vê o topo do prédio segundo um ângulo de 60°.



Desprezando a altura do observador, calcule, em metro, a altura do prédio.

10 (Unicamp-SP) Para medir a largura $\overline{AC}$ de um rio, um homem usou o seguinte procedimento: localizou um ponto B de onde podia ver na margem oposta o coqueiro C, de forma que o ângulo $A\hat{B}C$ fosse 60°; determinou o ponto D no prolongamento de $\overline{CA}$, de forma que o ângulo $C\hat{B}D$ fosse 90°. Medindo $AD = 40$ metros, achou a largura do rio. Determine essa largura e explique o raciocínio.